Chapitre 3

L'analyse topologique des réseaux

Un réseau est un ensemble solidaire de voies de circulation et de communication entre les différents éléments d'un système organisé. Il peut être analysé de différentes manières selon l'approche adoptée : technique, économique, relationnelle, spatiale, topologique… Il est défini en fonction de la technique utilisée (technique de la traction : animale, motorisée…), du milieu de la circulation (terrestre, aérien, fluvial, maritime), de la nature du produit mobilisé (biens, personnes, informations, énergie, eau) et des éléments mis en relation (villes, régions, personnes, groupes, entreprises…). On peut distinguer les réseaux naturels comme les réseaux hydrographiques façonnés par la nature en fonction des ressources (précipitations) et des contraintes (lithologie, topographie…) et les réseaux humains établis pour assure la circulation et la communication entre les différents lieux. Les réseaux sont très divers, ils vont des réseaux de transport (terrestres, aériens, maritimes, fluviaux, les conduites : gazoducs et oléoducs), aux réseaux techniques qui desservent la ville comme les VRD : voirie, eau, gaz, téléphone, eaux usées, eaux pluviales ; aux réseaux hertziens de la radio et de la télévision (satellites, émetteurs et relais de transmission), aux réseaux câblés (Internet, grand débit, fibres optiques jusqu'aux « autoroutes de l'information ».

Le terme *réseau* se réfère à l'infrastructure matérielle (*réseau-support*) alors que le *réseau d'échange* se réfère plutôt au schéma tissé par les flux à travers les différentes infrastructures. Il faudrait ajouter le réseau de l'information destiné à commander et réguler le trafic : l'*infostructure* qui comprend les câbles, les centres de commande, les tours de contrôle à travers le réseau des services, le réseau téléphonique et de plus en plus téléinformatique (Curien N et Dupuy 1996).

Position, fonction et structure se trouvent très liées et se manifestent souvent à travers des circuits, des réseaux et des flux (Belhedi A 1980, 9) dont l'analyse permet d'éclairer la configuration, la structure et la dynamique des entités territoriales, sociales ou communautaires…

A l'opposé du territoire qui se fonde sur la continuité, le réseau se fonde plutôt sur la discontinuité quelque soit sa densité et le taux de desserte. Or la fonction première de tout réseau est de mettre en relation les lieux distants, c'est-à-dire de rompre la discontinuité des lieux. L'accès au réseau peut être ubiquiste et banal (piste, chemin, route…) ou réglementé et organisé à travers des points bien précis comme les autoroutes, les aéroports, les ports, les gares ou les fournisseurs des services Internet (FSI). Le territoire comme espace approprié et organisé se fonde sur la présence d'un réseau et le contrôle de la mobilité et l'accès : les centres, les carrefours, les nœuds, les axes et leurs hiérarchies sont les éléments structurants de l'espace et du territoire. Aussi, la coprésence de plusieurs réseaux améliore la desserte mais exprime aussi l'hétérogénéïté spatiale à travers l'accessibilité inégale et différentielle des différents lieux. Le réseau exprime selon C Raffestin l'inscription du pouvoir sur l'espace[1]. Il se fonde même sur la différenciation des lieux selon Ullmann (Cf. supra), les nœuds et les lieux d'accès constituent ainsi des lieux de pouvoir spatial, des points de référence, et d'un coups privilégiés.

Le réseau permet la relation distanciée, la mise en relation indirecte à travers la connexité des lieux. La différence réseau-territoire tend à s'atténuer au fur et à mesure que les réseaux se densifient, se multiplient, s'affinent et couvrent l'ensemble des lieux ouvrant la voie vers la continuité. En fin de compte, le réseau capillaire ne se confond il pas avec le territoire ?

On parle aussi de réseaux pour ce qui est des liens immatériels entre les personnes qu'on appelle *réseaux sociaux*, *réseaux personnels* et dont le lien peut être de nature parentale, professionnelle, amicale, associative ou clientèle, communautaire. Ces réseaux sociaux ne sont pas matérialisés par une infrastructure mais ont une localisation précise : réseau de sous-traitance, réseau de clients, réseau migratoire,

[1] Cité par Pumain D et Saint-Julien T - 2005, p.91, in *L'analyse spatiale. Localisation dans l'espace*, A colin, Cursus.

réseau de contrebande, réseau de commerce transfrontalier ou réseau d'un parti ou d'une association caritative...

Pour analyser la structure des réseaux et pouvoir les comparer, le besoin s'est fait sentir depuis longtemps pour trouver des outils efficaces et la solution a été trouvée du côté de la topologie qui permet d'analyser la morphologie des réseaux.

L'analyse des réseaux en termes de topologie remonte au problème classique d'Euler des sept ponts de Königsberg en 1736 et Cayley qui étudia en 1789 la coloration des cartes. Mais ce n'est qu'en 1936 que le premier ouvrage de König fit son apparition avec le titre " Théorie Endlichen und Unendlichen Graphen". Il a fallu cependant attendre 1960 pour que William Garrison, un des pionniers de la géographie théorique, introduise la théorie des graphes dans l'étude des réseaux de transport une fois que cet outil s'est, entre temps, beaucoup raffiné lors des années 1950 par les psychologues (Bavelas 1948, Festinger 1950, Bales 1951-53, Leavitt 1951, Heise et Miller 1951, Luce...). Mais c'est surtout Kansky (1963) qui utilisa la théorie des graphes et élabora des indices topologiques.

En fait, la théorie des graphes est loin d'être une véritable théorie, elle constitue une branche de la topologie combinatoire, un langage puissant pour analyser et discerner la structure de base des réseaux et étudier les espaces discrets. C'est une géométrie qualitative et relationnelle où l'espace est élastique tout en respectant l'ordre, la contiguïté. Le monde réel est un monde discret beaucoup plus que continu et se fonde sur des relations d'ordre, c'est ce qui explique le succès d'une telle théorie.

On se limiter a ici aux éléments de base de la théorie des graphes tout en laissant le soin aux lecteurs intéressés de puiser dans les ouvrages spécialisés.

1 - Quelques définitions de base

On ne peut pas aborder la théorie des graphes sans passer en revue quelques concepts fondamentaux de base afin de faciliter l'utilisation ultérieure et l'élaboration d'indices et d'indicateurs topologiques.

1.1 - Le graphe

Un graphe est une figure géométrique formée d'un ensemble de *noeuds* (points, lieux, sommets, places...) reliés par des *arcs* (liaisons, liens, arêtes, voies, relations...). Les arcs expriment les *relations* qui existent entre les noeuds et sont définies par la présence/absence, la nature (flux, coût, contiguïté, capacité...), l'intensité (valeur), le sens (symétrie) et l'espace (un ou plusieurs plans...).

Ainsi chaque réseau peut être représenté par un graphe où les notions de distance, de coût, de capacité et de flux peuvent être introduites à un niveau élevé de conceptualisation selon la symétrie des relations, leur nature et le type de réseau.

Il est évident que cette représente permet de dévoiler certaines caractéristiques de structure spatiale et de morphologie du réseau moyennant la perte d'informations par rapport à la représentation cartographique classique[2] : orientation, direction, angles et détails du tracé, position exacte des lieux… Tout est question de choix de ce qu'on veut montrer en dernière analyse. Le graphe permet d'exprimer les liens entre les objets quelque soit la nature de ces liens : on peut représenter par exemple les rapports de contiguïté entre les espaces ou les régions matérialisées par le centre de gravité, le chef-lieu ou la ville la plus importante.

1.2 - Les types de graphe

Sur la base de certains indicateurs, on peut distinguer plusieurs types de graphes selon la symétrie, l'intensité et le plan de localisation:

- La symétrie : Graphe symétrique et graphe orienté

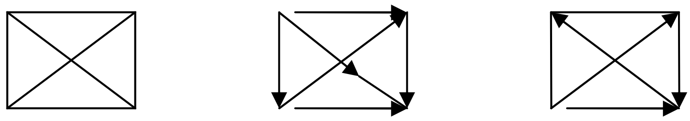
Les relations dans un graphe peuvent être symétriques, on parle de graphe non orienté ou *symétrique* et de *graphe orienté* "directed graph". C'est le cas des réseaux routiers ou ferroviaires dans le premier cas, des conduites ou des réseaux hydrographiques et de la voirie urbaine dans le second cas où la circulation automobile se trouve orientée avec la présence de sens uniques. Ce dernier réseau peut comporter, en même temps, des relations orientées (sens unique)

---

[2] La chorèmatique permet aussi de mettre en relief le phénomène de structure et les rapports spatiaux tout en simplifiant la réalité et en éliminant les détails.

et des relations symétriques (double sens) et être le théâtre d'une circulation orientée (voiture) ou non (piétons).

Dans le graphe, l'orientation est exprimée par la présence de *flèches*. Dans le graphe asymétrique, deux sommets sont reliés par un arc orienté, on parle plutôt d'*arc* alors que dans le graphe symétrique on parle d'*arête*.



G Symétrique Arête — G Orienté arc — G Mixte

- La nature de la relation

Le graphe peut exprimer simplement la présence ou l'absence de relation : c'est le *graphe non valué*. Il peut aussi représenter l'intensité et la valeur de cette relation (capacité, coût, durée de trajet, distance, flux...), c'est le *graphe valué*.

- Le plan de situation

On peut distinguer le graphe planaire et le graphe non planaire :

*** Le graphe planaire** se situe intégralement dans le même plan, chaque intersection est considérée comme un noeud. C'est le cas des réseaux de transport terrestre (routes, voies ferrées, canaux..). L'intersection se trouve matérialisée dans l'espace sous forme d'un carrefour, d'un échangeur ou un passage à niveau...

*** Le graphe non planaire** : les divers lieux se situent dans des plans différents ce qui fait que l'intersection ne constitue pas nécessairement un noeud. C'est le cas des réseaux aériens, maritimes, et des réseaux de communication. C'est ainsi qu'une ligne aérienne Tunis-Sfax n'induit pas un noeud avec la ligne aérienne Tozeur-Monastir.

1.3 - La distance topologique

C'est la longueur d'un chemin ou d'un circuit reliant deux noeuds. Elle est mesurée par le nombre d'arcs qui le composent dans un graphe non valué. Dans un graphe valué, la distance est la somme des valeurs qui caractérisent chaque arc. Elle est appelée aussi *écart* : E(i, j) = Max ij

1.4 - Graphe complet, graphe partiel et sous-graphe

*** Le graphe partiel** : c'est un graphe dont on supprime certains arcs.

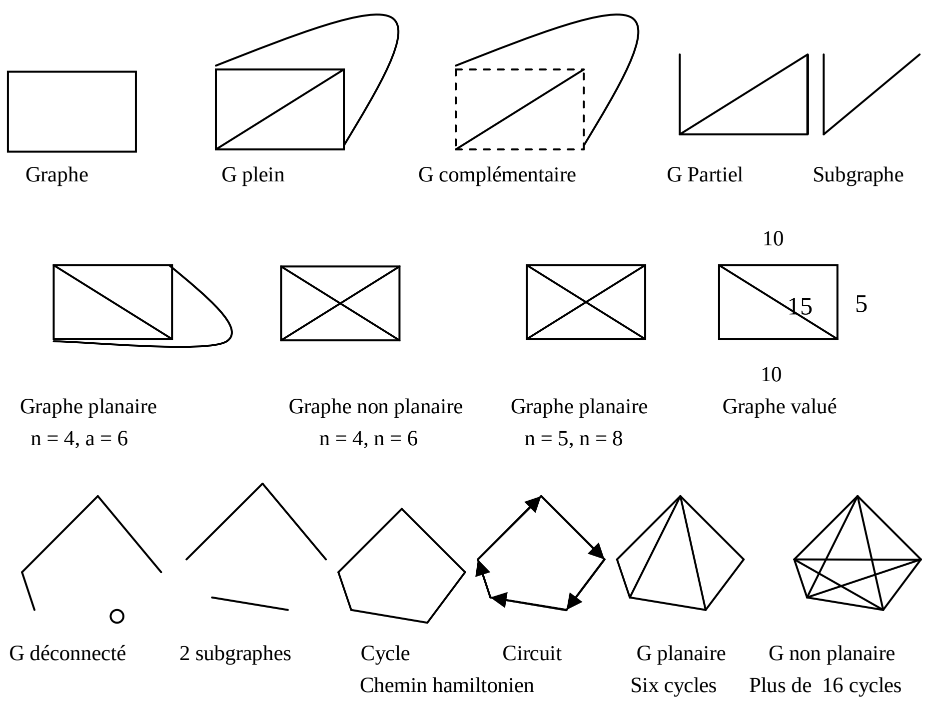
*** Le sous-graphe ou le subgraphe** est un sous-ensemble d'un graphe, c'est un graphe dont on supprime certains noeuds.

*** Le graphe plein** est un graphe où à chaque paire correspond un arc. Il y a toujours une relation directe entre chaque paire de nœuds.

*** Le graphe complémentaire** est le graphe A' complément à un graphe A par rapport au graphe plein. C'est le graphe partiel qui manque au graphe A pour atteindre le graphe plein.

*** La fermeture transitive** est l'ensemble des sommets qu'on peut atteindre en partant d'un point xi : F(x). Elle représente l'ensemble des nœuds accessibles à partir d'un point donné. *La fermeture transitive inverse* est l'ensemble des sommets d'où on peut atteindre xi. Les deux fermetures sont identiques dans un graphe symétrique.

Type de graphes



1.5 - Chemin, circuit et cycle

*** Le chemin et la chaîne** : Le chemin est une suite ordonnée d'arcs dont le terminal de l'un correspond au point initial de l'autre. Le terme *chemin* est utilisé surtout pour les graphes orientés. Le *chemin hamiltonien* est un chemin passant une seule fois par tous les sommets du graphe.

On utilise le terme de *chaîne* pour les graphes symétriques, c’est une suite d’arêtes telle que deux arêtes consécutives aient une extrémité commune. La longueur d’une chaîne est égale au nombre d’arêtes (a) ou le nombre de nœuds traversés (n) avec : a = n-1.

*** Le circuit et le cycle** : C’est un chemin fermé dont le point initial correspond au point terminal. Un circuit passant par tous les noeuds une seule fois est dit *circuit hamiltonien*. Une boucle est un arc qui part et aboutit au même point, c'est circuit d'un seul arc.

Pour les graphes symétriques, on parle plutôt de **cycle** tandis que le terme de circuit est souvent réservé aux graphes orientés.

1.6 - Connectivité du graphe

La propriété fondamentale du réseau est de relier les différents lieux ou les éléments, c’est la *connectivité*. La multiplicité des liens possibles entre deux nœuds quelconques renforce davantage le pouvoir d’interconnexion du réseau, c’est la *connexité* qui est le degré de liaison ou de connexion entre les différents nœuds d’un graphe[3]. Deux noeuds sont dits *connectés* lorsqu'il existe entre ces deux noeuds un chemin.

a- Les niveaux de connectivité

---

[3] Il y a parfois confusion entre les deux termes, l’ouvrage de Pumain D et Saint-Julien T 2005 est significatif à ce titre en inversant connexité et connectivité. La connexité est présentée comme la propriété de relier les points alors que la connectivité est présentée comme le degré de richesse des liaisons et la présence de liens alternatifs entre deux points donnés, cf. p. 93. C’est ainsi que la matrice de connectivité est appelée matrice de connexité (p.93). Quelque soit les termes utilisés, il faut distinguer entre le fait d’être relié et la richesse des liaisons.

Les nœuds peuvent être simplement joints dans un *tronc* ou dans un *graphe connecté*, ou bien reliés directement les uns aux autres pour former des nœuds adjacents dans un *graphe fortement connexe* :

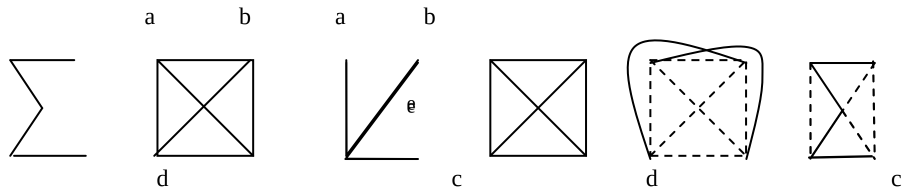
- Un graphe connecté est un graphe où il existe un chemin entre n'importe quelle paire de noeuds. *Un graphe déconnecté* est un graphe où certains noeuds ne sont pas reliés.

- Le graphe complet est un graphe où il y a *au moins un arc* (relation) entre une paire quelconque de noeuds. Deux sommets quelconques dans un graphe complet sont toujours adjacents. Ceci est valable surtout pour les réseaux de petite dimension où il est toujours possible d'assurer une liaison directe entre tous les points. Lorsque la taille augmente, il devient presque impossible de joindre directement tous les noeuds sauf dans les réseaux non planaires notamment aériens par exemple. Dans un graphe non planaire, le nombre d'arêtes est une combinaison de n nœuds deux à deux (C_n^2). Dans un graphe planaire, le nombre maximum est par contre égal à : 3(n - 2).

- Le graphe connexe est celui où il existe une liaison (une chaîne) entre chaque paire. Souvent le réseau routier est connexe mais le réseau fluvial français par exemple ou le réseau aérien en général n'est pas connexe, il est constitué de plusieurs sous-réseaux entre lesquels le passage n'est pas possible.

- **Le graphe fortement connexe** est un graphe où il y a entre chaque paire de noeuds *au moins deux liaisons* (une liaison symétrique ou une liaison/sens dans le cas d'un graphe orienté : une liaison AB et une liaison BA). A partir de chaque point, on peut atteindre tous les sommets du graphe.

- L'arborescence est un graphe où entre une paire quelconque, il n'existe qu'un seul chemin, sans circuit. Le graphe prend l'allure d'un arbre.



Tronc T = 4 G Connexe Arborescence G Fortement connexe G Complémentaire Branches

Le dernier graphe correspond au tronc (T = 4), aux branches (b = 4) qui forment les cycles de base (4)

b- Tronc, branches et cycles de base

Le tronc est le nombre minimum d'arcs nécessaires pour que le graphe ne soit pas déconnecté. On obtient dans ce cas une arborescence (tree). On a T = min a, soit : **T = n - 1**
a : nombre d'arcs n : nombre de nœuds. Dans le premier graphe ci-dessus, on a 4 arêtes pou 5 nœuds.

Les arcs supplémentaires au tronc constituent *les branches,* ils assurent une plus grande connexité du graphe et donnent lieu à des circuits ou cycles : b = a - T = a - (n -1)

b = a - n + 1

c- Les cycles de base dans un graphe connecté

Chaque branche forme un circuit ou *cycle de base* qui est un cycle dont au maximum un arc est utilisé par un autre cycle de base. Dans le dernier graphe ci-dessus, on un tronc de 4, 4 branches ce qui nous donne 4 cycles de base : abe, acde, ade, bce. Les autres cycles ne sont pas basiques dans la mesure où plus d'une arête se trouve utilisée par d'autres cycles de base comme les cycles : abcd, abc, acd, abd et bcd. Pour le cycle abcd par exemple, toutes ses arêtes se trouvent utilisées par les 4 cycles de base.

d- Cas de plusieurs subgraphes

Dans le cas de plusieurs sous-graphes, le tronc est le nombre minimal d'arcs pour que chacun des sous-graphes ne soient pas déconnecté, soit T = Σ (ni - 1) avec ai : nombre de noeuds du sous-graphe i. On obtient alors si p = nombre de sous-graphes T = n - p. Les branches sont alors : b = a - (n - p), d'où : **b = a - n + p**

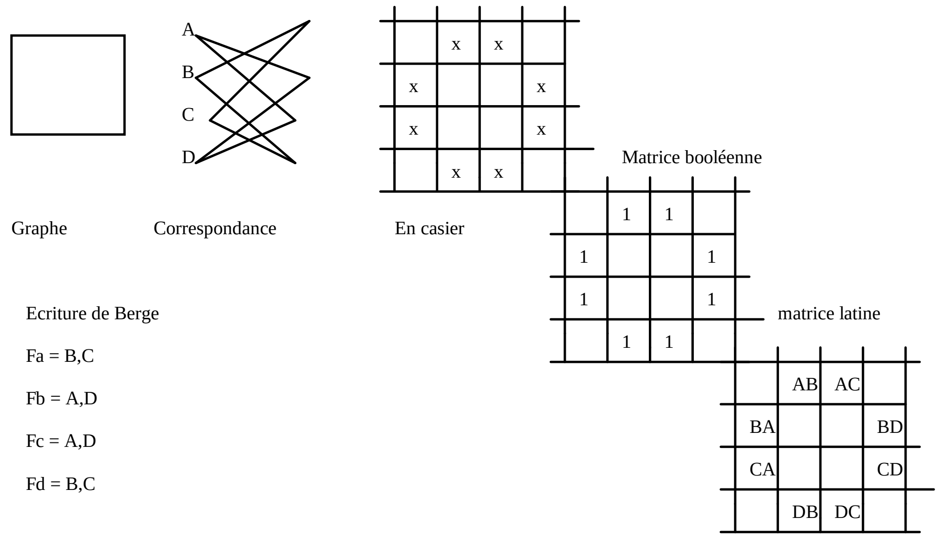
Dans un graphe de 4 noeuds (n = 4), on a n! possibilités (12) de choisir le tronc qui contient toujours 4 arcs (n-1). Le reste des arcs forment les branches (a - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3) chaque branche détermine un *circuit de base*.

Le graphe de 4 nœuds et les différents types de troncs correspondants

1.7 - Représentation du graphe

On peut représenter un graphe de différentes manières : la correspondance, en casier, la matrice booléenne (ou binaire), la matrice latine, le schéma sagittal ou en écriture de Berge (fermeture transitive). Ci-dessous, un graphe de 4 nœuds et ses différentes représentations.

Le graphe et ses différentes représentations



A un graphe donné, on peut associer une matrice, appelée *matrice associée* qui définit le graphe, la nature et la valeur des relations. Cette matrice associée peut représenter la connectivité, la distance (géodésique ou sur réseau), le coût, le temps du trajet, la capacité, la contiguïté...

2- La centralité des nœuds

On peut mesurer la centralité d'un noeud par de nombreux indices et paramètres : on peut citer le degré de noeud, le nombre de König...

2.1 - Le degré du noeud

Le *degré du nœud* est le nombre d'arcs incidents et sortants d'un noeud. Il exprime la *nodalité* du point et représente un *indice de* *carrefour*. Il varie de 0 à (n - 1) selon que le noeud est périphérique ou central. Dans un graphe connecté, le minimum est égal à 1. Dans un cycle ou un circuit, il est au moins égal à 2, chaque point est à la fois l'aboutissement et le départ d'une arête au moins.

Le degré du noeud exprime la centralité, la connectivité du lieu et la multiplicité des fonctions potentielles qui peuvent être assurées par le noeud. Plus le noeud est central, plus le degré est élevé, plus il est connecté aux autres et plus il peut jouer des fonctions dans un réseau. Il faut distinguer cependant entre les arcs entrant et sortants notamment dans le graphe orienté.

Le demi degré du noeud

Dans un graphe orienté, on peut distinguer *le demi degré intérieur* qui est le nombre d'arcs incidents ou entrants (di) et *le demi degré extérieur* (de) qui est représenté par le nombre d'arcs sortants. Ils varient tous deux entre 1 et n-1, ils sont égaux dans un graphe symétrique (di = de). Le degré du noeud est la somme des demi-degrés : d = di + de.

Le degré de noeud varie selon le nombre de noeuds (n) si bien que la comparaison des graphes est rendue difficile. On peut exprimer la centralité et la connectivité du noeud par un indice de centralité Cd qui en est dérivé selon la formule suivante :

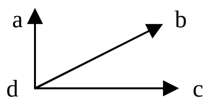
En retranchant le minimum (min) et en divisant le résultat obtenu par l'écart (Max-min) on obtient un indice variant de 0 à l'unité : Cd = (d - min)/(Max - min)

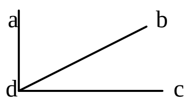
***** Graphe connecté : Le degré de noeud varie de 1 à (n-1), l'indice de centralité et/ou de connectivité s'écrit alors comme suit : Cd = (d - 1)/(n - 2).

***** Cas général : Dans un graphe déconnecté, certains nœuds isolés ont un degré nul. Le degré de noeud varie ainsi de 0 à (n-1). L'indice de centralité s'écrit alors : Cd = d/(n-1).

La matrice binaire associée au graphe exprime le degré des nœuds, les lignes représentent le demi degré extérieur (arcs sortants) tandis que les colonnes expriment le demi degré intérieur (arcs incidents).

La matrice du graphe orienté ci-dessous résume les degrés de nœuds du graphe orienté (abcd), le point d a un de = 3 et un di = 0 ce qui exprime sa position de domination et son aptitude à donner des ordres tandis que les points a, b et c se trouvent plutôt subordonnés en ordre isolé puisqu’ils ne sont pas liés entre eux, di = 1 et de = 0.





Matrices associées aux graphes et degré des nœuds

	a	b	c	d	de	**d**
a	0	0	0	0	0	**1**
b	0	0	0	0	0	**1**
c	0	0	0	0	0	**1**
d	1	1	1	0	3	**3**
di	1	1	1	0	3	**6**

	a	b	c	d	de	**d**
a	0	0	0	1	1	**2**
b	0	0	0	1	1	**2**
c	0	0	0	1	1	**2**
d	1	1	1	0	3	**6**
di	1	1	1	3	6	**12**

La matrice du graphe symétrique montre que les deux demi degrés sont égaux, le point d est central (d = 6) alors que les autres sont également excentriques avec d = 2.

Plus un nœud est connecté, plus son degré de nœud est élevé et plus il est central. De là, il est mieux placé pour assurer plusieurs fonctions dans le réseau puisque l’interaction entre les différents lieux passe par lui.

2.2 - L'indice de König[4] ou le nombre associé

L’*indice de König* (Ki) est la distance maximale d'un lieu i à chacun des autres noeuds en suivant le plus court chemin. C'est le plus court chemin séparant un point quelconque du point le plus éloigné en utilisant la distance topologique exprimée par le nombre d’arcs ou d’arêtes entre ij. On l’appelle aussi l’*écartement* du sommet.

$$\mathbf{Ki = Max_j\, dij}$$

$$\mathbf{E(i) = max\ (E(i, j))\ \text{pour tout}\ j}$$

[4] - Euler (1736) a eu à résoudre le problème des 7 ponts de l'île de Königsberg (actuellement Kaliningrad) : comment partir et revenir à un point en traversant chaque pont une seule fois. Le graphe de l'île rassemble les 4 parties (noeuds) et les ponts (arcs). Deux conditions pour avoir un cycle : la forte connectivité et la symétrie. Sur cette base, Euler établit les règles du chemin minimum. C’est D. König qui a proposé cet indice en 1936, in Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, pp.63-64.

Plus le point est central plus l'indice est faible, les lieux périphériques ont les valeurs les plus élevées. Le *centre du graphe* est le sommet dont l'écartement est minimum, c'est le lieu le plus accessible et constitue le lieu idéal pour certains services d'urgence ou de sécurité : ambulances, pompiers… On appelle *rayon du graphe*, l'écartement du centre alors que le diamètre mesure l'écart maximal (cf. supra).

$$E(c) = \min E(i) \text{ pour tout } i$$

Le *noeud médian* est représenté par le nœud dont la somme des écarts à tous les autres nœuds est minimale, il constitue la meilleure localisation possible pour la distribution ou la collecte :

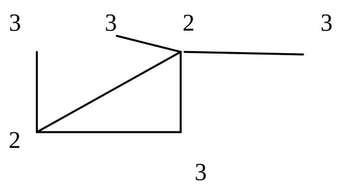
$$E(m) = \min \Sigma_i \, (e(i, j)$$

Beaucoup plus que le degré de noeud, l'indice de König reflète la *centralité globale* alors que le degré de noeud ne tient en compte que des noeuds limitrophes. Il varie de 1 à (n - 1) qui représente le tronc (T) selon la connexité du graphe : $1 \leq Ki \leq n - 1$ ou $1 \leq Ki \leq T$.

Là aussi, comme l'indice est lié au nombre de nœuds dans le réseau, on peut exprimer un indice de centralité variant entre 0 et 1 sur la base de l'indice de König, il s'écrit comme suit[5] :

$$\mathbf{Ck = 1 - (Ki - 1)/(n - 2)} \qquad 0 \leq Ck \leq 1$$

$$\mathbf{Ck = 1 - (Ki - 1)(T - 1)}$$



Dans le graphe à 6 nœuds ci-dessus, les points périphériques ont un indice de 3, deux points centraux ont un indice égal à 2, Ck varie ainsi de 0,5 soit (1 - 2/4) à 0,75 soit (1 -¼).

[5] La formulation est la nôtre. Cf. Belhedi A. Comme Ki varie de 1 à n - 1, on peut utiliser la formule : (Ki - min)/(Max - min) ce qui nous donne : (Ki -1)/(n - 1) - 1) = (Ki -1)/(n - 2). Mais cet indice exprime plutôt l'excentricité ce qui conduit à calculer son complément à l'unité, soit : Cki = 1 - (Ki - 1)/(n - 2)

Ces deux indices (d, Ki) sont spécifiques à chaque nœud et il faudrait faire appel à des indicateurs globaux pour l'ensemble du graphe.

3 - Les caractéristiques d'ensemble du graphe

La topologie permet de caractériser le graphe par un certain nombre d'indicateurs relatifs à la dispersion, la circuité ou la connexité...

3.1- Les indices de dimension

Les indices de dimension caractérisent l'ensemble du réseau, on peut distinguer longueur totale (l) notamment dans un graphe valué[6], le nombre de nœuds (n) et d'arêtes (a). Ces trois paramètres évoluent selon une courbe logistique en S qui exprime la diffusion du réseau dans le temps et l'espace (Belhedi A, 1980, 61-65 ; Pumain D et Saint-Julien T, 2005, 96-97). La diffusion lente et limitée au(x) foyer(s) au début, se généralise ensuite en accélérant le rythme en seconde phase pour se ralentir enfin lorsque l'espace est couvert, la population est desservie ou lorsqu'une nouveau réseau commence à se mettre en place. C'est le cas du chemin ferroviaire aussi bien dans le monde, au niveau de nombreux pays comme la France (Dancoisne P, 1984) ou de la Tunisie (Belhedi A, 1980, 96-97,). Très souvent dans un réseau quelconque, on a la relation : $l > a > n$ avec un écart de plus en plus élevé.

Entre 1828 et 1937 date de création de la SNCF, le réseau s'est étendu depuis le premier tronçon entre Saint Etienne-Lyon (1828-1836) jusqu'à la présence de 14 sous-réseaux en 1849. Le réseau s'est développé en étoile, en rayonnant à partir de Paris à un rythme très lent jusqu'en 1853, avec une accélération entre 1853-1871 où le nombre de gares s'est beaucoup augmenté exprimant la connexion et le raccordement des différents centres et des tronçons. Entre 1871-180, l'extension du réseau a été plus rapide que les gares et les arêtes ($l > a$ et n) exprimant ainsi le développement du maillage. Le tableau suivant résume les différents indicateurs de dimension du réseau, on reviendra plus loin sur les trois dernières colonnes qui expriment trois indices topologiques.

---

[6] Dans un graphe symétrique, la longueur totale (l) n'est que le nombre d'arêtes (a).

Evolution du réseau ferroviaire français 1830-1930

Année	Nbre de sous-résaux	Longueur totale (l)	Nbre de gares (n)	Nbre de liens (a)	l/n	l/a	a/n
1830	1	38	2	1	19	38	0.5
1840	4	497	15	11	26.5	45.2	0.73
1850	14	3083	65	52	**65.4**	**59.3**	0.8
1860	5	9525	190	212	50.1	44.9	1.12
1870	3	18600	354	429	52.5	43.3	1.21
1890	1	38239	890	1198	43	31.9	1.35
1910	2	51440	1107	1700	46.5	30.2	1.54
1930	1	51000	1162	1732	43.9	29.5	1.49

Source : Dancoisne P, 1984, cité par Pumain D et Saint-Julien 2005, p.96, traitement personnel pour les trois dernières colonnes; Alsace et Lorraine ont été réintégrées de 1870 à 1918.

Le réseau ferré mondial a suivi le même schéma avec 195 km en 1831, 860000 kms en 1905 et 1336000 km en 1947 (Belhedi A, 1980, 365). Le rythme d'extension, lent au début avec 31 kms par an, entre 1840-1840, s'accélère entre 1880-1890 avec 225 kms/an pour se réduire par la suite avec 28,9 km entre 1950-1960 (Belhedi A, 1980, 365). L'extension maximale du réseau varie selon les pays : 1911 dans les pays du centre (France, Angleterre, Allemagne, USA[7]), 1950 en URSS, 1960 au Japon, 1932 en Algérie et au Maroc, 1960 en Angola.

Extension du réseau ferroviaire mondial en km

Année	1831	1840	1880	1900	1905	1913	1922	1947
L	195	7700	372000	754000	860000	1100000	1170000	1336000

Source : Belhedi A 1980, 365

En Tunisie, le réseau a atteint sa maximale extension vers 1935. Plus de 200 km ont été fermés au trafic et 134 km ont été déposés entre 1950 et 1960 (Belhedi A, 65). Après le TGM en 1872, l aligne de Mejerda (1872-1876), il y a eu un arrêt lié au Protectorat , puis une accélération entre 1892-1918 liée au réseau du NE et du CE

[7] La plus grande extension du réseau américain a été atteinte en 1916 avec 409000 km (1960 : 384000 km), alors que le processus de fermeture a atteint l'Europe un peu plus tard entre 1930-1940. Cf. Belhedi A, 1980, 64

de 1892 et surtout à l'extraction minière par la suite avant l'arrêt de 1920 à part quelques petits tronçons locaux[8].

Extension du réseau ferroviaire tunisien en km

Année	1872	1876*	1880	1895	1899	1905
L	20	174	201	322	874	1176

Année	1909	1913	1918	1931	1942	1975
L	1522	1840	1987	2066	2160	1950

Source : Belhedi A, 1980, 367, * Le TGM n'est pas comptabilisé

3.2 - La dispersion

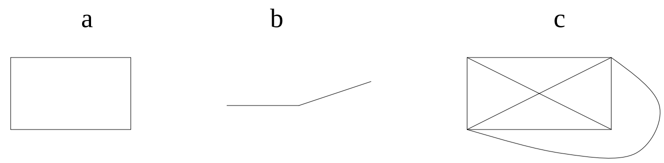
Elle peut être exprimée par deux indicateurs : le diamètre et l'indice Pi.

- **Le diamètre** : C'est la distance maximale qui sépare une paire quelconque dans un graphe en suivant le plus court chemin. Il mesure l'étalement du réseau et la dispersion des lieux connectés. Il varie de 1 à (n - 1) et correspond à l'indice de König le plus élevé dans un graphe.

$$\boldsymbol{\delta = \mathrm{Max}_{ij}\ dij} \qquad 1 \leq \delta \leq n - 1$$

Là aussi, on peut exprimer cette dispersion par un indice indépendant du nombre de noeuds et variant de 0 à l'unité, sous la forme suivante qu'on peut appeler l'indice de diamètre[9] :

$$\boldsymbol{\delta' = (\delta - 1)/(n - 1)}$$



Dans les trois graphes ci-dessus, le diamètre est partout égal à de 2 mais avec un nombre de noeuds différents : 4 (a), 2 (b) et 5 (c). L'indice du diamètre y est de 0,33 (a); 1 (b) et 0,25 (c).

---

[8] Tronçons de Kalaa Jerda-Kouif (1930), Haïdra-Kasserine et ligne du lignite au Cap Bon (1940)

[9] Comme le diamètre δ varie de 1 à (n - 1), en retranchant le min (1) et en divisant le résultat sur le nouveau maximum (δ - 1 - 1), on obtient un indice δ' variant de 0 à 1. La formulation est la nôtre, Cf. Belhedi A, 1989

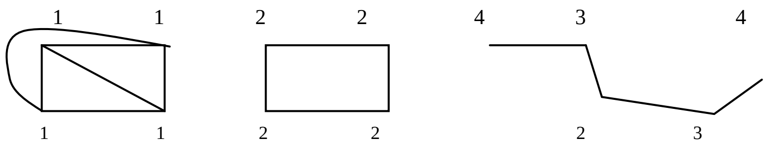
- L'indice Pi : C'est le rapport entre la longueur totale (L) et le diamètre (δ). Il exprime la dispersion et l'étalement du graphe, il est d'autant plus élevé que le graphe est compact, dense et ramassé.

$$\boldsymbol{\pi = L/\delta}$$

Dans le cas d'une distance topologique[10], (L = a), l'indice Pi varie entre l'unité (un seul arc) dans un réseau étalé (en ligne) à 3(n - 2) dans le cas d'une dispersion nulle qui représente le nombre maximum d'arêtes (max a = 3(n-2). $1 \leq \pi \leq 3(n - 2)$

Là aussi, la valeur de l'indice π dépend du nombre d'arêtes et il convient d'utiliser un indice insensible au nombre d'arcs, variant de 0 à 1, qu'on peut appeler *indice de dispersion (π')*, il s'écrit sous la forme suivante[11] :

$$\pi' = (\pi - 1)/(\text{Max } a - 1) = (\pi - 1)/(3(n - 2) - 1) = (\pi - 1)/(3n - 7)$$
$$\pi' = (L/\delta - 1)/(3n - 7) = [(a/\delta) - 1]/(3n - 7)$$
$$\boldsymbol{\pi' = (a - \delta)/\delta(3n - 7)}$$



$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 4$
$\delta' = 0$	$\delta' = 0{,}33$	$\delta' = 3$
$\pi = 6$	$\pi = 2$	$\pi = 1$
$\pi' = 1$	$\pi' = 0{,}2$	$\pi' = 0$

3.3 - La circuité

Elle est mesurée par deux paramètres : le nombre cyclomatique et l'indice alpha :

- Le nombre cyclomatique (ou le 1er nombre de Betti) est le nombre de *cycles de base*[12] dans un réseau ou le nombre de branches b (cf. supra) : $U = \Sigma (ai - Ti) = \Sigma(ai - (n_i - 1)) = a - (n - p)$

---

[10] A côté des paramètres topologiques (a et δ), on peut utiliser les données réelles et mesurer l'indice π par le rapport entre la longueur et le diamètre réels (en kms…).

[11] La formulation est la notre, Cf. Belhedi A, 1980

[12] - En rappelant que le cycle de base ou cycle indépendant est un cycle dont un seul arc au maximum est repris ou utilisé par un autre cycle. Dans un graphe, le nombre de cycles de base est plus réduit que le nombre global de cycles.

$$U = a - n + p$$

Avec a : le nombre d'arcs, n : le nombre de noeuds et p : le nombre de subgraphes (Nombre Zéro de Betti), n_i et a_i : le nombre de nœuds et d'arcs dans un subgraphe, T_i : le tronc du subgraphe i.

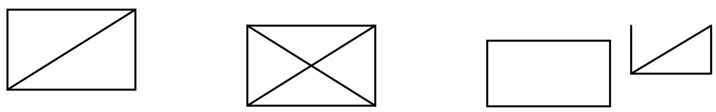
Dans un graphe connecté (p = 1) : U = a - n + 1.

Dans un graphe déconnecté : U = a - n + p

Le nombre cyclomatique U varie de 0 à (2n-5) pour un graphe planaire : $0 \leq U \leq 2n - 5$

Pour un graphe non planaire, U = a - n + 2, il varie de 0 à un maximum de : (n - 1)(n - 2)/2. $0 \leq U \leq (n - 1)(n - 2)/2$

Circuité des graphes



G Planaire U = 2 — U = a – (n – 1)

G non planaire U = 4 — U = a – n + 2

Deux subgraphes U = 2 — U = a – n + p, (p = 2)

- L'indice alpha

C'est le rapport entre le nombre de circuits (cycles) de base et le nombre maximum de ces circuits (cycles). Le nombre maximum de cycles est : Max U = Max a - T = 3(n - 2) - (n - 1) = 2n - 5

$$\alpha = U/(2n - 5)$$

$$\alpha = (a - n + 1)/(2n - 5)$$

Cet indice varie de 0 à 1 et est exprimé en %. Il exprime *la circuité* du graphe et *la richesse du choix des voies* dans un réseau[13]. Sa valeur s'élève avec l'adjonction de nouvelles liaisons au réseau initial. Il dépasse 20 dans les pays développés et il est en dessous de 10 dans les pays sous-développés.

On peut distinguer trois configurations au moins : minimale, intermédiaire et maximale :

---

[13] Il est appelé parfois indice de connectivité, cf. Pumain D et Saint Julien T, 2005, p.100.

*** La connectivité minimale** : chaque noeud est relié à un autre par *une seule voie*, a = n - 1, d'où $\alpha = 0$

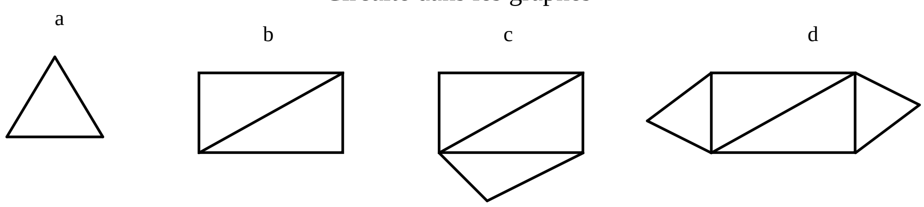
*** La connectivité maximale** : chaque noeud est relié à un autre par u*ne voie au moins*. On a : a = 2n - 3, $\alpha = (2n - 3) - (n - 1)) / (2n - 5)$, soit $\alpha = (n - 2) / (2n - 5)$.

Lorsque n tend vers l'infini, la limite du rapport est de 0,5 et on a : $0.5 \leq \alpha \leq 1$ pour ≥ 3 [14]

*** La connectivité intermédi**aire se situe entre les deux cas avec : $0 \leq \alpha \leq 0.5$

Pour le réseau routier tunisien, l'indice est 36% (Belhedi A 1980). Il est de 1,4% pour le réseau métropolitain parisien (Pumain D et Saint Julien T, 2005, 102) ce qui s'explique par le coût élevé de construction et le temps réduit de déplacement mais conduit aussi à un coût élevé d'exploitation.

Circuité dans les graphes



Un cycle ou circuit — Trois cycles — Trois cycles de base et 2 cycles de base — Quatre cycle de base

Caractéristiques topologiques des réseaux

	a	b	c	d
n	3	4	5	6
a	3	5	7	9
T	2	3	3	4
U	1	2	3	4
δ	2	2	2	3
π	1.5	2.5	3.5	3
α	1	0.66	0.60	0.57

Cas du graphe non planaire

[14] Pour n = 2, on a : $\alpha = 0$. Le nombre maximum d'arêtes est de 2, soit n – 2 = 0.

Pour un réseau non planaire, le nombre maximum de cycles est : n(n - 1)/2 - (n - 1), l'indice alpha s'écrit : $\alpha = U/[n(n-1)(n-2)/2]$

La mesure de la connectivité doit être complétée par celle de la connexité.

Certains réseaux notamment ferrés constituent en fait des sous-réseaux indépendants et p représente ainsi le nombre de sous réseaux. C'est le cas par exemple lorsqu'on a un double écartement des voies comme en Tunisie où Tunis constitue le seul point de jonction du réseau métrique au Sud et à voie normale au Nord. Le nombre cyclomatique devient nul même, voire négatif si on élimine le cycle technique de Jebel Jeloud.

3.4 - La connexité

Elle est exprimée par la richesse en arcs et en relations d'un graphe à travers l'indice Gamma.

L'indice Gamma : C'est le rapport entre le nombre des arcs et le nombre maximum d'arcs (γ = a/Max a). Il varie de 0 à 1 et est exprimé en % :

$$\gamma = a / 3(n-2)$$

Il mesure la connexité du graphe, il varie de 0,33 à 0,5 pour une connectivité minimale ($n \geq 4$)[15] à plus de 0,66 pour une connectivité maximale ($n \geq 3$) :

*** Connectivité minimale** : a = n - 1, d'où $\gamma = (n-1)/3(n-2)$, soit un peu moins de 1/3.

*** Connectivité maximale** : a = (2n-3)/3(n-2), d'où $\gamma = 2(n-3)/3(n-2)$, soit un peu plus de 0,66.

Dans les pays développés où les réseaux sont denses, sa valeur dépasse 40%. En Tunisie, il est de 44,6% pour la route mais seulement 34,2% pour le rail (Belhedi A, 1980).

Cas du graphe non planaire

---

[15] Lorsque n = 2, le minimum est a = 2 pour un graphe connecté, soit $\gamma = 2/3$, lorsque n = 4, le minimum est de a = 3, soit une valeur de $\gamma = 0,5$.

Pour un graphe non planaire, le nombre maximum d'arcs est : n(n-1)/2 et l'indice gamma s'écrit : $\gamma = a/[n(n-1)/2]$.

3.5 - La connectivité et la structure

Elle exprime le rapport des relations aux nœuds dans un réseau et elle est mesurée par l'indice Bêta (β).

L'indice Bêta (β) est le rapport entre les arcs et les noeuds, il exprime la connectivité[16], la *densité de relation* et *la complexité de la structure*. Il mesure *le nombre moyen de relations* par nœud. Il varie de 0 à plus de 3.

$$\beta = a/n$$

Il est inférieur à l'unité (1) en l'absence de circuit cycle) avec une *arborescence*, égal à 1 en cas d'un circuit unique et s'élève au dessus de l'unité avec une structure plus complexe du réseau. Il exprime les *chemins alternatifs* dans le graphe et représente la densité de relations/lieu. En effet, plus le réseau est riche en relations, plus il y a des chemins alternatifs et plus les choix sont possibles donnant une structure plus complexe du réseau.

Il varie de (n-1)/n dans un graphe minimal avec un tronc (a = n - 1) à un maximum près de trois : (3(n-2)/n dans un graphe à connectivité maximale. Lorsque le nombre de noeuds est relativement élevé, l'indice varie entre moins de (1) et près de trois (3)[17].

En pays développés, l'indice dépasse 1,4 alors qu'il est souvent inférieur à 1 et dans le Tiers-monde pour le rail. En Tunisie, il est de 0,973 pour le rail et 1,32 pour la route (Belhedi A, 1980).

Valeurs de bêta pour les réseaux ferrés de certains pays

Sri Lanka	Bolivie	Ghana	Turquie	Nigeria	Thaïlande	Mexique	Hongrie	France	Tunisie
0,85	0,9	0,9	1	1	1	1,15	1,38	1	0

Source : Pinchemel Ph. Et G – 1992 : La face de la terre. A Colin, p. 104

Pour un graphe non planaire, Bêta varie de moins de 1 à un maximum de : (n(n-1)/2)/n = (n - 2)/2.

[16] Il est appelé par certains indice de connexité Cf. Pumain D et Saint Julien T, 2005, 99

[17] Lorsque n est grand (tend vers l'infini), le minimum et le maximum tendent respectivement vers 1/3 et 3.

La relation entre les indices alpha et bêta[18]

La relation entre les indices bêta et alpha : L'indice bêta varie de (n - 1)/n à 3(n - 2)/n. En retranchant le minimum (n-1)/n et en divisant le résultat sur le nouveau maximum (3 (n - 2) - (n - 1)/n, pour l'exprimer sous forme d'un indice variant de 0 à 1, on obtient : [β - (n-1)/n] /[(3(n-2)/n - (n-1)/n)] = (a - n + 1) /(2n - 5), qui n'est autre chose que l'indice alpha α. Cela veut dire que l'indice alpha n'est que l'indice bêta exprimé par rapport à l'unité ou en pourcentage.

Sur la base de ce rapport et lorsque n est élevé, lorsque β = 1, on a un seul circuit et a = n, en remplaçant a par n dans l'indice alpha : α = (a - n + 1)/(2n-5), on obtient une valeur de : α = 1/2n.

Pour de petits réseaux, les indices bêta et alpha ne varient pas dans le même sens. Aa début, l'indice bêta varie peu tandis que gamma baisse même suite à la multiplication des tronçons sans liaison entre eux et l'absence de relations alternatives entre une paire quelconque de nœuds. Parallèlement à la jonction des lignes, l'indice bêta augmente rapidement que le nombre de nœuds et les deux indices augmentent fortement. Dans les grands réseaux où n et a sont élevés, les deux indices se trouvent corrélés. Les réseaux ferrés en Europe ont une valeur bêta de 1 à 1,5 (Pumain D et Saint Julien T, 2005, 99). Le métro de Paris (293 stations et 353 tronçons) a un indice bêta de 1,2 et un indice gamma de 0,4 (Lauriot 1996, cité par Pumain D et Saint Julien T 2005).

Evolution de α, β et γ du réseau ferré français

	Bêta	Gamma	Alpha
1828	0.5	1	0
1830	0.5	0.66	0
1840	0.63	0.23	0
1850	0.78	0.27	0
1870	1.21	0.41	0.11
1890	1.43	0.47	0.21
1910	1.48	0.49	0.24
1930	1.49	0.5	0.24

Source : Pumain D et Saint Julien T, 2005, 100

La relation entre le degré de nœud et l'indice bêta[19]

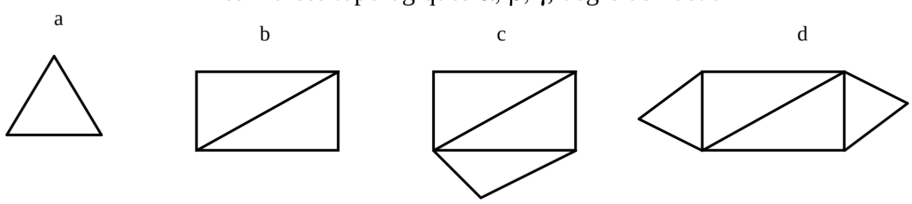
[18] Ce rapport a été établi le 30 novembre 2009, plus de 22 ans après avoir utilisé les indices topologiques sans poser même la question ?

L'indice bêta mesure la connectivité, c'est-à-dire le nombre moyen de relations par nœud tandis que le degré de nœud exprime le nombre moyen de relations pour chaque nœud. L'indice bêta n'est en réalité que la moyenne des degrés des différents nœuds. On peut voir facilement que :

$$\boldsymbol{\beta = di/2 = de/2 \quad \text{et} \quad di = de = 2\beta}$$
$$\boldsymbol{\beta = d/4 \qquad \text{et} \quad d = 4\beta}$$

Si on prend les graphes ci-dessous comme exemple, on voit que l'indice bêta n'est la moitié du demi degré moyen dans le cas d'un graphe symétrique, et le quart du degré moyen de noeud :

Les indices topologiques α, β, γ, degré de noeud



	a	b	c	d
n	3	4	5	6
a	3	5	7	9
Σ di = Σde = Σd/2	6	10	14	18
di/n = de/n = d/2n	2	2,5	2,8	3
d/n = (di + de)/n	4	5	5,6	6
β = a/n	1	1,25	1,4	1,5
α = (a - n + 1)/(2n – 5)	1	0,67	0,6	0,57
γ = a/3(n - 2)	1	0,83	0,77	0,75

Un cas particulier lorsque β = 1

Un cas particulier mérite d'être analysé, celui où β = 1, c'est-à-dire un graphe avec un seul cycle. Dans ce cas, α = 1/2n, β = 1 et γ = 1/3.

Limite des indices lorsque n est grand

[19] Relation que nous avons établie en 2009

Indice	Formule	a < n	a = n	a > n
α	(a - n + 1)/(2n - 5)	-	1/2n	+
β	a/n	-	1	+
γ	a/3(n - 2)	-	1/3	+

Les indices bêta et gamma ne sont pas suffisants pour caractériser la morphologie des réseaux, ils peuvent avoir la même valeur pour des configurations contrastées. Il faut utiliser l'indice alpha pour différencier les réseaux.

Les indices évoluent au cours du temps et le tableau suivant résume les différents indices du réseau ferré français .

Evolution des indices du réseau ferroviaire français

	1840	1858	1885	1937
β	0.62	1.04	1.41	1.49
γ	0.22	0.35	0.47	0.49
U	0	11	351	574
α	0	0.03	0.2	0.24

Source : P Dancoisne, cité par Pinchemel Ph et G, 1997, p 105

3.6 - L'arborescence ou l'arbre

L'*arborescence* ou l'*arbre* est un graphe sans circuit où entre deux sommets quelconques, il y a une chaîne unique, chaque noeud a un seul antécédent et un seul descendant. C'est la structure la plus élémentaire d'un réseau puisqu'il a le nombre minimum d'arêtes avec : $a = n - 1$. C'est un véritable tronc dont il s'agit (cf. supra). On l'appelle aussi *graphe connexe minimal* puisqu'il est déconnecté dès qu'on lui enlève une seule arête, les indices alpha et bêta sont nuls. Le terme d'arborescente se trouve souvent utilisé dans les graphes orientés.

Un graphe est dit arborescence de racine Xo si les trois conditions suivantes sont respectées :

- Xo est le seul sommet sans antécédent
- Tout sommet n'a qu'un seul antécédent et un seul descendant
- Le graphe ne contient ni cycle, ni circuit

Le réseau hydrographique forme une arborescence. Il présente la caractéristique que l'écoulement de l'eau se fait toujours dans le sens amont-aval, sans cycle, avec une hausse du débit, de la quantité et de la superficie drainée.

Horton H (1945) a préconisé une méthode qui permet de dégager un ordre dans le réseau. Il s'agit de la numérotation de l'ordre hiérarchique des affluents selon la démarche suivante[20] :

1- La jonction de deux rivières de même ordre forme une rivière d'ordre supérieur qui peut recevoir des tributaires de tous les ordres inférieurs au sien.

2- On remonte le courant pour attribuer leur numéro aux rivières en choisissant pour principale celle qui a l'angle le plus petit avec la rivière aval

3- On dénombre les talwegs correspondant à chaque ordre et on calcule leur longueur moyenne.

Horton H (1945) a énoncé les deux lois suivantes :

1- Le nombre des rivières de différents ordres dans un basin tend à approcher une progression géométrique inverse où le premier terme de la série est 1 et la raison le rapport de confluence.

2- Les longueurs moyennes des rivières de chaque ordre tendent à approcher une progression géométrique normale où le premier terme est la longueur moyenne des rivières du premier ordre.

Ces deux lois peuvent être vérifiées empiriquement en utilisant une échelle semi-logarithmique portant le nombre et la longueur des talwegs en y et l'ordre (x). La relation est croissante pour la longueur des talwegs, décroissante pour le nombre des rivières.

Ces lois s'appliquent en réalité aux autres réseaux techniques qui ont des structures semblables quand on les examine à plusieurs échelles. Il s'agit de l'organisation hiérarchique des objets fractals dans la mesure où un fractal obéit au principe d'autosimilarité et conserve sa forme lors d'un changement de niveau et est invariant d'échelle et se trouve régie par la forme puissance (Dauphiné A, 2003, chap. 6). Alors que Benoît Mandelbrot et ses successeurs ont consacré leurs travaux au monde physique (hydrographie, relief, climat…)[21], de nombreux travaux ont relevé la fractalité des réseaux, Kwang Sil Kim (2002) a relevé que la dimension fractale du réseau de transport public de Séoul est passée de 1,15 à 1,35 en quelques années exprimant ainsi une irrégularité croissante[22].

Dans un travail antérieur, nous avons élaboré un indice pour exprimer cette arborescence qu'on a appelé l'*indice Lamdha* (Belhedi A 1980).

---

[20] Cité par Pumain D et Saint Julien T, 2005, pp.115-118.

[21] Cf. Rodriguez-Iturbe I et Rinaldo A - 2001 : Fractal River Basin, Chance and Self-Organization. Cambridge University Press. Mandelbrot B – 1975: Les objets fractals. Flammarion, 1997 : Fractales, hasard et finance. Champs Flammarion.

[22] Cité in Dauphiné A, 2003, 180

L'indice Lamdha[23] est le rapport entre le nombre de terminaux (t) et le nombre maximum de terminaux dans un graphe. Il varie de 0 dans un graphe sans terminaux à (n-1) dans un graphe très centralisé et hiérarchisé où tous les lieux sont des terminaux sauf un seul. Il est exprimé en % et s'écrit :

$$\boldsymbol{\zeta = t/(n-1)} \qquad 0 \leq \zeta \leq 1$$

En Tunisie, il est égal à 0,48 pour le rail contre 16,6 au Japon, 8,2 % en France 33 au Nigeria. Il est de 13,85 % pour la route (A. Belhedi 1980).

3.7 – La vulnérabilité

La vulnérabilité d'un réseau peut être mesurée par le nombre de nœuds ou d'arêtes dont le retrait ou le blocage entraîne la déconnexion du réseau. Il suffit d'une simple inondation ou d'un accident sur une section d'une ligne pour bloquer toute la circulation. On peut distinguer le point et les arêtes d'articulation :

Le *point d'articulation* (A_p) est le nombre de nœuds dont le retrait entraîne la déconnexion du réseau. Plus le nombre est réduit et plus le réseau est vulnérable. Il suffit parfois d'un seul point pour déconnecter le réseau et passer à deux sous-réseaux ?

Les *arêtes d'articulation* (A_a) sont le nombre minimum d'arêtes dont le retrait entraîne la déconnexion du réseau.

Combien de points ou d'arêtes faut-il supprimer et à quel endroit pour déconnecter un réseau et isoler des sous-réseaux ? Dans le cas où il s'agit d'un seul point (une ville, un pont…) ou seul tronçon, le lieu ou la voie requièrent une valeur stratégique de taille. C'est le cas par exemple du réseau ferroviaire tunisien dont la différence d'écartement fait de Tunis un point stratégique pour la desserte de l'espace tunisien. Le réseau ferré étant une arborescence, presque tous les tronçons forment des arêtes d'articulation. La présence de plusieurs liaisons réduit la vulnérabilité et rend la déconnexion du réseau très difficile.

---

[23] - Indice que nous avons élaboré en 1977 lors de notre travail sur le chemin de fer en Tunisie (Cf. A Belhedi 1977, 1980).

3.8 - La fonctionnalité

La fonctionnalité d'un réseau dépend de sa connectivité et de sa circuité qui lui donnent plus de possibilités. **L'indice de fonction** (fi) exprime le nombre de fonctions potentielles que pourrait assurer un réseau. Des indices ont été élaborés par Kansky et nous mêmes (1980) dans ce sens.

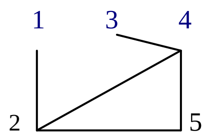
L'indice de fonction W : C'est la somme des indices de fonctions des noeuds : $W = \Sigma wi$, avec wi : le nombre de fonctions potentielles assurées par un nœud, il est égal au double du degré de nœud (pour les terminaux : $wi = 2d$) : $Wi = 2d = di + de$

Pour l'ensemble du réseau, on a $W = 4a$.

Dans le graphe orienté, le degré de nœud exprime le nombre de fonctions assurées par le nœud dans la mesure où chaque arc incident ou sortant assure une fonction d'expédition ou de réception :

$Wi = d$, avec $d = do + di$

La somme des degrés de nœuds dans le graphe est égale à 4 fois le nombre d'arcs : $W = 4a$



Le point 4 peut être à l'origine d'un flux vers les trois autres sommets (2, 3 et 5) et en être la destination des flux qui en partent, soit au total 6 fonctions : $wi = 2*3 = 6$. Les valeurs pour l'ensemble du graphe sont de 6 pour le point 2, 4 pour le point 5, 2 pour les terminaux 1 et 3, soit au total 20 pour le graphe : $W = 4a = 20$

On a vu précédemment aussi que l'indice bêta ($\beta = a/n$) exprime aussi la fonctionnalité à travers le nombre moyen d'arcs par nœud, chaque arc assure au moins une fonction, on a : $\mathbf{W = 4n\beta}$.

Le degré de nœud moyen est : $dm = 4\beta = 4a/n$, l'indice bêta exprime ainsi indirectement la fonctionnalité avec : $\boldsymbol{\beta = dm/4}$.

Dans un graphe connecté symétrique[24], le maximum de wi est : d = 2(n - 1), le minimum est de 2. Pour l'ensemble du graphe, les valeurs extrêmes sont respectivement 2n(n - 1) et 2n :

$$2 \leq wi \leq 2(n - 1) \text{ et } 2n \leq W \leq 2n(n - 1)$$

Les indices de fonction wi et W sont cependant fonction du nombre de nœuds, ce qui ne facilite guère la comparaison. En retranchant le minimum des trois valeurs et en divisant sur le maximum, on obtient un indice fonctionnel relatif wi' qu'on peut écrire comme suit[25] :

$$wi' = (d - 2)/2(n - 2) \quad \text{et} \quad W' = (W - 2n)/\ 2n(n - 1)$$

Dans un graphe connecté symétrique, le maximum de fonctions est lié au maximum des arêtes, soit : 4.max a = 4.3(n-2). Le minimum est atteint dans le cas d'un terminal avec d = 2 où le nœud n'assure que deux fonctions : expédier et réceptionner un flux.

$$2 \leq wi \leq 12(n - 2)$$

Dans un graphe, le nombre de fonction varie ainsi de 6(n-1) dans un graphe fortement centralisé à 12(n-2) dans un graphe fortement connexe[26].

$$6(n - 1) \leq W \leq 12(n - 2)$$

La fonctionnalité peut être mesurée par un indice relatif variant entre 0 et 1[27].

Dans un graphe orienté[28], l'indice de fonction est égal au degré du nœud avec : wi = d = de + di. Comme di = de dans l'ensemble du

---

[24] De la même manière on peut faire le même développement pour les graphes orientés où le maximum de wi est d = 2(n - 1), mais le minimum peut être de 1 seulement.

[25] Le minimum étant de 2, le maximum de 2(n - 1), on a : $2 \leq wi \leq 2(n - 1)$. Pour obtenir un indice relatif variant de 0 à 1, il suffit de retrancher de l'ensemble des termes le minimum, ce qui nous donne : $(d - 2) \leq wi - 2 \leq 2(n - 1) - 2$, soit :
$(d - 2) \leq wi' \leq 2(n - 4)$.

[26] Dans un graphe très centralise, il y a un seul noeud qui se trouve relié à tous les autres 4(n -1) alors que les autres nœuds ne se trouvent reliés qu'au point central, soit 2(n - 1). L'ensemble des fonctions est alors de : 4(n - 1) + 2(n - 1) = 6(n - 1). Dans le graphe fortement connexe, tous les noeuds se trouvent liés, le nombre de fonctions est alors : 4.3(n -2) = 12(n - 2).

[27] En retranchant le minimum et en divisant le résultat sur le maximum, on obtient l'indice fonctionnel relative: W' = W - 6(n - 1)/6(n - 11)

graphe, l'arc incident à un nœud est en même temps un arc sortant d'un autre, on a : W = 2Σdi = 2Σde

L'indice de fonction peut être exprimé aussi par la matrice binaire associée dont les lignes représentent les arcs sortants, les colonnes les arcs incidents tandis que la somme totale exprime la demi somme de l'indice de fonction (cf. infra).

L'indice iota (i)

C'est le rapport entre la longueur réelle du réseau et l'indice de fonction w :

I = L/W

L'indice exprime la structure, la fonction et la longueur, il est associé à l'indice thêta, il départage les réseaux dont la valeur thêta n'est pas discriminante. Plus sa valeur est élevée et plus le nombre de fonctions est réduit. Il est égal à 0,65 pour le rail et 0,9 pour la route.

Cet indice exprime la longueur moyenne par fonction, ce qui n'est pas très pertinent à notre avis. C'est pourquoi on déjà proposé dans un travail antérieur deux indices qui ont le mérite de rester au niveau topologique (Belhedi A, 1980) :

- Iota 1 : Il exprime le nombre moyen de fonctions par arête.

i1 = W/a

- Iota 2 : Il est égal au rapport de W sur le nombre de nœuds : on l'a appelé d'ailleurs sigma en 1977 (Belhedi 1980) :

i2 = W/n

Rapporté au nombre maximum de fonctions, on pet exprimer le niveau de fonctionnalité d'un réseau : F = W/6n(n-2)

Le réseau ferré a un indice de 0,33, c'est-à-dire qu nœud n'assure en moyenne que le tiers de son potentiel fonctionnel.

Intégrer la fonction transit

Dans un graphe symétrique connecté, chaque noeud peut être l'origine et la destination du flux en direction et à partir de tous les autres nœuds (n - 1), et un point de transit des flux entre les différents nœuds avec les différentes combinaisons possibles (deux à deux, trois à trois...), exception faite des terminaux (t) qui ne peuvent pas assurer

---

[28] - Cf. A Belhedi 1980.

ce transit. En se limitant au transit direct qui s'opère entre les nœuds adjacents de part et d'autre, on a 2(n - 1) possibilités dans un graphe symétrique[29].

Les fonctions assurées par un nœud sont[30] : fi = n(n - 1) tandis que celles d'un terminal sont : ft = 2(n - 1)

La fonction de transit direct varie de 0 pour un terminal à 2n(n - 1) pour un noeud relié à tous les autres nœuds.

Le nombre total de fonctions assurées dans un graphe est le suivant[31] :

Fo = an(n - 1) + t.2(n - 1)

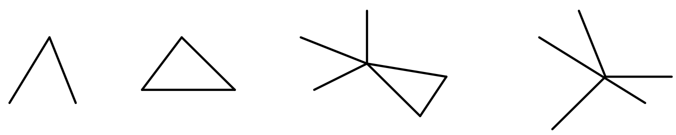
Fo = (n - 1)(an +2t)

t : terminaux, n : nombre de noeuds

Le maximum de fonctions pour un nœud est de n(n-1) tandis que le minimum est 2(n-1), il s'en suit que l'indice relatif peut être écrit sous la forme[32] :

fi' = (fi - 2(n-1))/(n-1)(n-2)

Pour un réseau connexe, chaque nœud est relié à tous les autres et le maximum de fonctions assurées est[33] : $n^2(n-1)$, d'où on peut mesurer la fonctionnalité par rapport à ce maximum: $F = Fo / n^2(n-1)$



A B C D

[29] Les données sont différentes dans un graphe orienté où les voies ne sont ni symétriques, ni automatiques. Les terminaux se limitent souvent à une seule fonction de réception ou d'expédition.

[30] On a : fi = 2(n - 1) + $2C^2_{n-1}$ = 2(n - 1) + 2[(n - 1)!/(n - 1 - 2)!2! = 2(n - 1) + 2[(n - 1)!/(n - 3)! 2!]= 2(n - 1) + (n - 1)(n - 2) = n(n - 1)

[31] Développements opérés en 2009

[32] Pour élaborer cet indice relatif variant de 0 à 1, on retranche le minimum (2(n - 1) et on divise sur le maximum (n(n – 1), le nouveau maximum devient : n(n - 1) - 2(n - 1) = (n - 1)(n -2).

[33] On retrouve le même résultat en développant la formule précédente avec : F = (n - 1)(an + 2t) avec a = n et t = 0, ce qui nous donne : F = $(n – 1)n^2$

	A	B	C	D
n	3	3	6	6
a	2	3	6	5
t	2	0	3	5
Fo	14	18	120	80
	(2 .3) + 2*(2.2)	3*(3.2)	3*(6.5) + 3*(2.5)	(5.6) + 5*(2.5)
Max	18	18	180	180
F	0,777	1	0.67	0.444

3.9 - La densité de la desserte

Elle est mesurée par deux indices qui expriment la longueur moyenne d'une relation par nœud : les indices Eta et Thêta

- L'indice Eta (η) : C'est le rapport entre la longueur totale (L) et le nombre d'arcs (a). Il mesure la longueur moyenne de l'arête (en kms, miles…)[34] :

$$\eta = L / a$$

L'indice ne dépasse pas 40 dans les pays développés notamment. En Tunisie, il est de 47 pour le rail 29,8 kms pour la route (Belhedi A, 1980).

- L'indice Thêta : C'est le rapport entre la longueur du graphe (L) et le nombre de lieux[35]. Il exprime la longueur moyenne par lieu (en kms) et est souvent associé à Eta :

$$\theta = L/n$$

En Tunisie, il est égal à 45,789 kms pour le réseau ferroviaire et 22,5 kms pour la route (Belhedi A, 1980).

Les études élaborées par Kansky (1963), Yeates, Berry 1960, W. Garrison et D Marble[36] 1967 ont montré le lien étroit entre les indices topologiques et le niveau de développement économique :

* La forte corrélation entre certains indices comme Bêta et Pi (r = 0,73), Bêta et Eta (r = - 0,68), Pi et L (r = 0,80). La corrélation

[34] On peut utiliser aussi le trafic total (T) ce qui exprime le trafic moyen par tronçon.

[35] On utilise aussi le Trafic total, ce qui exprime le trafic moyen par somment

[36] - Garrison et Marble ont étudié 25 pays, Berry a utilisé 95 et 43 variables introduites dans l'analyse factorielle. Il a dégagé le facteur technologique et démographique.

entre le nombre de nœuds et la longueur totale du réseau semble élevée avec 0,99 (Pinchemel Ph et G, 1997, 105).

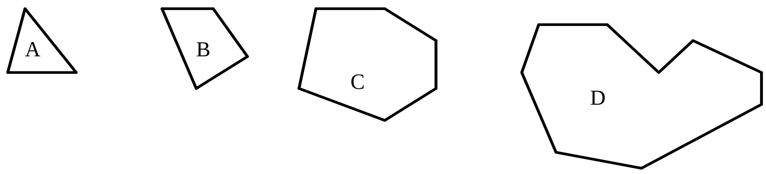
* La corrélation entre Bêta et le développement économique mesuré par la consommation d'énergie/hab., la hausse continue de cet indice avec le temps et l'étroite relation entre Pi et le revenu brut.

* L'importance du *facteur technologique* (urbanisation, industrialisation, transports, revenus, niveau de vie, commerce ...), qui explique 43 à 73% de la variance des divers paramètres (α, β, μ, γ, δ...) alors que *la forme, la taille et le relief* n'interviennent que pour les paramètres η et δ (Garrison et Marble) tandis que *le niveau démographique* n'intervient qu'en dernière position.

Werner (1968) a étudié six réseaux de même taille et a montré que les trois indices (α, β , γ) sont dans le même ordre, ils sont incapables d'opérer une discrimination entre les différents réseaux.

De plus, (β , γ) sont redondants, ce qui privilégie l'indice alpha. James et al. (1970) remarquent que ces indices ne permettent pas de différencier des réseaux selon leur taille. Il semble que ces indices mesurent chacun un aspect différent de la connectivité.

La valeur bêta est très peu discriminante, elle est égale à 1 dans le cas d'un cycle quelque soit la forme ou la taille du réseau. Le graphique ci-dessous montre que la valeur de bêta ne change pas, la valeur de gamma varie peu entre les cas extrêmes. Pour un réseau de 100 nœuds avec un seul cycle par exemple, la valeur des trois indices est : $\beta = 1$, $\alpha = 0{,}0051$ et $\gamma = 0{,}34$.



Indice	Formule	A	B	C	D
n		3	4	6	9
a		3	4	6	9
U	a - n + 1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\beta}$	a/n	1	1	1	1
$\boldsymbol{\alpha}$	(a - n + 1)/2n - 5	1	0,33	0,142	0,077
$\boldsymbol{\gamma}$	a/3(n - 2)	1	0,67	0,5	0,43

Nous avons vu ci-dessus que lorsque b = 1 et que le nombre de nœuds est élevé, l'indice alpha tend vers 1/2n alors que l'indice gamma tend vers 1/3.

4 - Cas particuliers de réseaux

On a traité jusque là les réseaux classiques mais en réalité il y a plusieurs types de réseaux particuliers qui sont plus appropriés à certains domaines : les réseaux cellulaires, triangulaires…

4.1- Réseau cellulaire ou triangulaire ?

Un réseau cellulaire est un réseau en cellules ou cases reliant des points régulièrement répartis selon un treillis donné.

Max a : 2n - 3

Nombre de case : c = a - n + 1

Max de cases : n pair : c = n - 2, n impair : c = n - 3

4.2 - Réseau carré

C'est un réseau composé de cases carrées ou rectangulaires régulières.

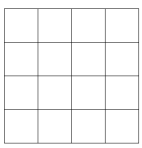
Max a : n pair : Max a = (3n - 4)/ 2

n impair : Max a = (3 n - 5) / 2

Nombre de cases : c = a - n + 1

Max de cases : n pair : c = (n - 2)/2 = n/2 - 1

n impair : c = (n - 3)/ 2



Un réseau en damier ou en carrés, avec n = 25, a = 40, les nœuds sont situés aux sommets des carrés. Le nombre de cases : c = 40-25 + 1 = 16.

Les indices topologiques sont l'avantage de comparer la structure des réseaux indépendamment de leur taille, leur configuration ou la position des différents lieux.

Caractéristiques des réseaux ferrés régionaux de Tours, Strasbourg et Lille

	S km²	L km	Gares n	Arcs a	Bêta	Gamma	Alpha
Tours	26907	949	20	19	0.95	0.352	0
Strasbourg	8902	652	24	24	1	0.363	0.023
Lille	12526	1024	34	46	1.353	0.479	0.206

Source : Dancoisne, op cité par Pumain D et Saint Julien T, 2005, 102

En outre, l'analyse permet de détecter les points qui se trouvent plus reliés entre eux que les autres ce qui est important dans l'étude des groupes sociaux ou les lieux centraux dans un système spatial ou social. L'utilisation des matrices associées permet une telle approche et de déterminer les composantes connexes.

5 - Les matrices associées

A un graphe donné, on peut associer **une matrice** qui exprime la nature des relations concernées et la structure du graphe. On peut distinguer plusieurs types de matrices relatives à la connectivité, l'accessibilité ou la distance, le flux ou dyade, la contiguïté, la capacité :

* **La matrice de connectivité** : C'est une matrice binaire (0, 1) carrée qui indique la présence (1) ou l'absence (0) de relation directe entre une paire quelconque de noeuds ij.

* **La matrice d'accessibilité** : C'est une matrice carrée dont le terme ij exprime l'éloignement sous la forme de **distance** (dij), de **coût** (cij) ou de **durée** (tij) ... entre une paire de noeuds ij.

* **La matrice d'incidence** : C'est une matrice qui indique les arcs incidents extérieurement (-1) et intérieurement (+1).

* **La dyade** : C'est une matrice de flux origine/destination entre une paire de noeuds.

* **La matrice de contiguïté** : Une matrice carrée binaire qui représente la contiguïté (1) ou non (0) des espaces (quartiers, régions) qui est la base des processus de diffusion et de mobilité.

* **La capacité** : La matrice exprime la capacité des voies d'un réseau et permet de voir les goulots d'étranglement et d'affecter le trafic selon les chemins indiqués : profil de voirie, réseau d'eau…

Ces matrices possèdent des propriétés importantes qui sont, à première vue, peu évidentes et permettent une analyse plus fine des caractéristiques du graphe.

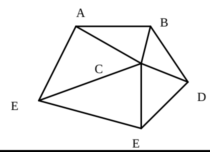
5.1 - La connectivité

En plus des indices déjà vus, la matrice associée nous permet de mesurer la connectivité différentielle et globale.

a- La connectivité directe

La matrice de connectivité indique les relations directes qui partent ou qui aboutissent à un point donné i.

* Le total de ligne indique les relations directes qui partent de i c'est *le demi degré extérieur* (de) tandis que le total de colonne représente les relations qui aboutissent à j : c'est *le demi degré intérieur* (di). Le total global indique l'ensemble des relations directes dans le graphe.



	A	B	C	D	E	F	Ci
A	0	1	1	0	0	1	**3**
B	1	0	1	1	0	0	**3**
C	1	1	0	1	1	1	**5**
D	0	1	1	0	1	0	**3**
E	0	0	1	1	0	1	**3**
F	1	0	1	0	1	0	**3**
Ci	**3**	**3**	**5**	**3**	**3**	**3**	**20**

La connectivité différentielle des lieux est exprimée par le total de la ligne de la matrice (li) qui indique le nombre de liaisons directes d'un point i vers l'ensemble du réseau (les autres nœuds). Il varie de (1) à (n - 1). On voit sur le graphe que le point C est le plus relié aux autres nœuds avec un total de 5 contre 3 pour les autres nœuds qui occupent une position périphérique[37] : $1 \leq Ci \leq n - 1$.

Dans le graphe ci-dessus, le total des lignes varie de 3 à 5, soit 60% et 100% en rapportant les valeurs au maximum potentiel (5).

[37] Des cas où le total de la ligne peut dépasser (n-1) sont possibles, c'est le cas lorsqu'on a plusieurs voies entre les nœuds, le maximum doit être ainsi calé sur cette valeur maximale.

Le total général de la matrice varie, quant à lui, entre un minimum (n) dans un graphe fortement centralisé et un maximum de n(n-1) dans un graphe fortement connexe : $n \leq C \leq n(n - 1)$

Dans le graphe ci-dessus, le total de la matrice est de 20, soit 60% du total possible (6*5 = 30).

Cependant, cet indicateur de la connectivité varie avec le nombre de nœuds dans le graphe et rend la comparaison entre réseaux difficile, c'est pourquoi le recours à un indice relatif est nécessaire. On peut alors élaborer cet *indice de connectivite* comme suit, il varie entre 0 et 1 et peut être exprimé en %[38] :

$$Ci = (li - 1)/(n - 2)$$

Pour l'ensemble du graphe, on peut aussi élaborer selon la même démarche, un *indice global de connectivité* Cg qui varie entre 0 et 100% :

$$Cg = (C - n)/n(n - 2)$$

Sur le graphe ci-dessus, la connectivité des nœuds varie de 0,5 (50%) pour les noeuds périphériques à 1 (100%) pour le point central c. Pour l'ensemble du réseau, la connectivité globale est de 14/24 = 0,5833, soit 58,33%

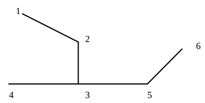
Cette connectivité directe est importante pour les réseaux non planaires (aériens, maritimes et de communication) tandis que dans les réseaux planaires (réseaux terrestres), c'est plutôt la connectivité indirecte qui requiert plus d'intérêt.

b- La connectivité indirecte

Souvent, c'est le nombre de possibilités ou de voies reliant ij qui est plus important que les liaisons directes. Elle est obtenue en élevant la matrice de connectivité (Cij) aux puissances successives jusqu'à la limite (n-1) pour obtenir la connectivité à 2, 3..., (n-1) degré. Ceci est utile pour les vols aériens ou le réseau téléphonique en heures de pointe pour voir les liaisons alternatives en passant par un, deux ou trois relais. Cette méthode permet de déterminer en recherche opérationnelle par exemple le plus court chemin dans un réseau ou

[38] En retranchant le minimum (1) et en divisant le résultat sur le nouveau maximum (n - 1 - 1 = n - 2), on obtient un indice variant entre 0 et 1. Indice que nous avons élaboré en 1980.

minimiser la longueur totale d’un réseau pour desservir un certain nombre de points.



C^1ij

	1	2	3	4	5	6	
1	0	1	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	0	2
3	0	1	0	1	1	0	3
4	0	0	1	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	1	2
6	0	0	0	0	1	0	1
	1	2	3	1	2	1	10

C^2ij

	1	2	3	4	5	6	
1	1	0	1	0	0	0	2
2	0	2	0	1	1	0	4
3	1	0	3	0	0	1	5
4	0	1	0	1	1	0	3
5	0	1	0	1	2	0	4
6	0	0	1	0	0	1	2
	2	4	5	3	4	2	20

C^3ij

	1	2	3	4	5	6	
1	0	3	0	1	1	0	4
2	2	0	4	0	0	1	7
3	0	4	0	3	4	0	11
4	1	0	3	0	0	1	5
5	1	0	4	0	0	2	7
6	0	1	0	1	2	0	4
	4	7	11	5	7	4	38

C^4ij

	1	2	3	4	5	6	
1	2	0	4	0	0	1	7
2	0	6	0	4	5	0	15
3	4	0	11	0	0	4	20
4	0	4	0	3	4	0	11
5	0	5	0	4	6	0	15
6	1	0	4	0	0	2	7
	7	15	20	11	15	7	75

Dans la matrice C^2ij, la case indique le nombre de voies entre ij en utilisant deux arcs, une valeur non nulle montre qu'il existe une connectivité directe à un noeud qui à son tour est relié directement à un autre. C'est le cas par exemple de $C^2 13$ en passant par le nœud 2.

La matrice C^3ij exprime la connectivité à 3 degrés (3 arcs), c'est le cas de $C^3 14$, $C^3 15$ en passant par les noeuds 3,...

On peut continuer le processus jusqu'à $C^\delta ij$ où les points les plus éloignés se trouvent reliés, c'est *la solution matricielle* (T) où il n'y a plus de zéro. Seulement, on constate qu'il y a une *redondance* : c'est le cas notamment des diagonales par exemple avec $C^2 11$ où la valeur 1 indique qu'on peut aller de 1 à 2 et de là revenir à 1. Dans le cas de $C^2 22$, la valeur 2 montre qu'on peut aller et revenir à 2 de deux manières : 2 - 1 - 2 et 2 - 3 - 2…

Pour réduire l'effet de redondance, on affecte chaque ordre par *un scalaire élevé à la même puissance* (s^n). Garrison (1960) a utilisé le scalaire 0,3 que nous avons utilisé (Belhedi A 1980). Mais on peut proposer un scalaire égal à 1/δ, ce qui paraît plus pertinent que 0,3 dans la mesure où le diamètre permet de paramétrer la connectivité indirecte en fonction de son étalement et la longueur de son diamètre :

$$\mathbf{T = sC^1 + s^2C^2 + ... \quad s^\delta C^\delta = \Sigma s^i C^i}$$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1	3	3	5	1	1	1	**14**
2	3	8	5	5	6	1	**28**
3	5	5	14	4	5	5	**38**
4	1	5	4	4	5	1	**20**
5	1	6	5	5	8	3	**28**
6	1	1	5	1	3	3	**14**
							143

c- La connectivité globale

On peut mesurer la connectivité globale du réseau en utilisant le total de la matrice de connectivité. Dans un réseau, le total de relations directes varie de n(n - 1) dans le cas d'un réseau très connexe à 2(n - 1) dans un réseau fortement centralisé ou linéaire pour un graphe planaire[39]. On peut alors proposer *un indice de connectivité* (c) variant de 0 à 1.

$$Cg = [\ \Sigma li - 2(n - 1)]/(n - 1)(n - 2) \qquad 0 \leq Cg \leq 1$$

Dans l'exemple précédent, on a une connectivité directe de 20 pour un minimum de 10 et un maximum de 30, soit une connectivité globale de 60% par rapport au maximum potentiel pour un graphe de six noeuds (30). Cet indice de 60% une fois relativisé et pondéré, devient seulement 50% : (20 - 10)/20 = 50).

On peut de la même manière proposer un indice pour la connectivité indirecte. En Tunisie, cet indice est de 0,213 pour la route et 0 pour le rail (Belhedi A 1980).

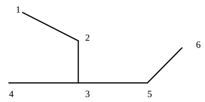
---

[39] Dans un réseau très fortement centralisé, un seul nœud est relié aux autres qui ne sont reliés qu'à un seul point, le nombre de liens directs est de (n-1) et de 1 pour les autres respectivement, soit (n-1), le total est 2(n - 1). Dans un réseau ligniforme, les nœuds intérieurs sont reliés chacun aux deux nœuds qui lui sont adjacents, les noeuds périphériques se trouvent reliés par une seule liaison déjà comptabilisée, soit au total : 2(n-2).

Dans le cas d'un graphe non planaire, le nombre maximal de liaisons est de : n(n - 1)/2 tandis que le nombre minimum est de (n - 1). Là aussi, chaque nœud peut avoir une liaison variant de 2(n-1) à n(n-1)/2. L'indice de connectivité peut être formulée selon la même démarche ci-dessus.

d- La fonction ordinale d'un graphe

Dans une matrice booléenne, on donne o au sommet dont la somme de ligne est la plus faible et on enlève ensuite la ligne et la colonne correspondantes. On identifie l'ordre 1 et on continue le processus jusqu'à la fin.



	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		**Ordre**
1	0	1	0	0	0	0	**1**	**0**
2	1	0	1	0	0	0	**2**	**1**
3	0	1	0	1	1	0	**3**	**2**
4	0	0	1	0	0	0	**1**	**0**
5	0	0	1	0	0	1	**2**	**1**
6	0	0	0	0	1	0	**1**	**0**
	1	**2**	**3**	**1**	**2**	**1**	**10**	

	2	**3**	**5**	
2	0	1	0	**1**
3	1	0	1	**2**
5	0	1	0	**1**
	1	**2**	**1**	**4**
	3			
3	0	**3**		
	3	**3**		

Dans le graphe ci-dessus, le nœud 1, 4 et 6 sont d'ordre 0, les nœuds 2 et 5 représentent l'ordre 1, enfin le nœud 3 constitue l'ordre 3. Cette fonction ordinale ouvre la voie à l'accessibilité et à la centralité (cf. infra).

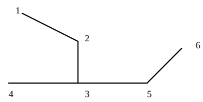
5.2 - L'accessibilité

Au lieu de s'intéresser aux relations directes, la distance constitue un paramètre de base qui déterminera l'accessibilité des lieux. Le plus simple est d'utiliser la distance topologique mais on peut utiliser la distance réelle (cf. infra).

La matrice d'accessibilité (Aij) indique la distance entre deux points ij selon le plus court chemin. On peut l'obtenir de deux manières :

*** La méthode directe** : elle consiste à porter dans la case ij la distance (nombre d'arcs) séparant ij selon le plus court chemin. Cette méthode est plus facile dans le cas de petits réseaux.

*** La méthode indirecte** : dans la matrice de connectivité indirecte (cf. supra), on remplace chaque fois les zéros qui disparaissent par la puissance de la matrice correspondante, exception faite de la diagonale. Sur la base du graphe précédent, on a les deux matrices suivantes :



C_{ij}

	1	2	3	4	5	6	Total
1	0	1	0	0	0	0	**1**
2	1	0	1	0	0	0	**2**
3	0	1	0	1	1	0	**3**
4	0	0	1	0	0	0	**1**
5	0	0	1	0	0	1	**2**
6	0	0	0	0	1	0	**1**

Matrice de connectivité

A_{ij}

	1	2	3	4	5	6	Total
1	0	1	2	3	3	4	**13**
2	1	0	1	2	2	3	**9**
3	2	1	0	1	1	2	**7**
4	3	2	1	0	2	3	**11**
5	3	2	1	2	0	1	**9**
6	4	3	2	3	1	0	**13**

Matrice d'accessibilité

La valeur maximale de chaque ligne de la matrice des écarts ou d'accessibilité (A_{ij}) indique l'*écartement* ou le nombre de König (cf. supra), qui est respectivement de 4, 3, 2, 3, 4. Le diamètre est exprimé par la valeur maximale (4), le centre par la valeur minimale (2) tandis que la somme de ligne minimale indique le point médian (le point 3) qui représente la localisation optimale.

A Shimbel (1953) a utilisé *la matrice du plus court chemin* ou *la matrice des écarts* pour éviter la redondance. La matrice D1 n'est que celle de la connectivité directe, la matrice D^2 est celle de la connectivité d'ordre 2 (C^2ij) où les zéros disparus sont remplacés par l'ordre correspondant (2) exception faite de la diagonale. En continuant le processus, on obtient les matrices D^3, D^4... et D^n, ($n = \delta$), la dernière constitue la matrice des écarts.

Les matrices suivantes représentent les matrices des écarts du graphe précédent. A chaque étape, on remplace les zéros par l’exposant (2, 3,… δ). La dernière matrice représente la matrice des distances topologiques.

La matrice des écarts ou d’accessibilité

D^1

	1	2	3	4	5	6	
1	0	1	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	0	2
3	0	1	0	1	1	0	3
4	0	0	1	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	1	2
6	0	0	0	0	1	0	1

10

D^2

	1	2	3	4	5	6	
1	0	1	2	0	0	0	3
2	1	0	1	2	2	0	6
3	2	1	0	1	1	2	7
4	0	2	1	0	2	0	4
5	0	2	1	2	0	1	6
6	0	0	2	0	1	0	3

28

D^3

	1	2	3	4	5	6	
1	0	1	2	3	3	0	9
2	1	0	1	2	2	3	9
3	2	1	0	1	1	2	7
4	3	2	1	0	2	3	11
5	3	2	1	2	0	1	9
6	0	3	2	3	1	0	9

54

D^4

	1	2	3	4	5	6	
1	0	1	2	3	3	4	13
2	1	0	1	2	2	3	9
3	2	1	0	1	1	2	7
4	3	2	1	0	2	3	11
5	3	2	1	2	0	1	9
6	4	3	2	3	1	0	13

62

La somme de la ligne i mesure la distance du point i au reste du réseau, elle exprime l'accessibilité du lieu i **au** réseau tandis que la colonne j représente l'accessibilité du réseau **au** point j. Plus ce total est faible, plus le point est accessible.

*** L'indice de Shimbel (δi)** est le total de la ligne i, $\boldsymbol{\delta i} = \Sigma dij$. Plus ce total est faible et plus le nœud est accessible. La distance à un nœud quelconque varie de 1 dans le cas d’un graphe fortement connexe à (n - 1) où le point est excentrique et présente la distance maximale. Le total de la ligne varie respectivement de n(n - 1) à n(n - 1)/2.

L’indice d’accessibilité de Shimbel est le rapport entre le total général au total de ligne du nœud :

$$SHi = \Sigma_i\Sigma_j\ E\ (i, j) / \Sigma_i\ \Sigma\ (i, j)$$

$$\text{ou}\ \ \mathbf{A}_{si} = \Sigma_i\Sigma_j dij\ /\ \boldsymbol{\delta i}$$

Les valeurs élevées indiquent les noeuds les plus accessibles tandis que les faibles valeurs représentent les noeuds périphériques.

*** L'indice de dispersion** : le total des distances dans un réseau varie selon le degré de sa dispersion. Il varie de n(n - 1) dans un réseau fortement connexe à n²(n - 1))/2 dans un réseau fortement dispersé[40]. On peut écrire l'indice de dispersion comme suit[41] :

$$\mathbf{D = (\Sigma li - n(n - 1))/[n((n - 1)(n - 2)/2]}$$

L'accessibilité est alors plutôt le complément à l'unité par rapport à la dispersion D, d'où on peut écrire : A = 1 - D,

$$\mathbf{A = 1 - 2(\Sigma li - n(n - 1))/n(n-1)(n - 2)}$$

Pour le graphe précédent, on a un total de 62 pour un minimum de 30 et un maximum de 90, soit une dispersion de 62/90 = 0,69. Le minimum est cependant de 30 ce représente près de la moitié et rend la comparaison avec d'autres réseaux très difficile. En utilisant l'indice relatif, on obtient (62-30)/60 = 0,533, soit 53,3%. En Tunisie, il est de 0, 117 pour la route et 1 pour le rail (Belhedi A 1980). L'accessibilité relative devient alors 0,467 ou 46,7%.

Dans un graphe symétrique, les deux totaux sont égaux, ce qui n'est pas le cas pour un graphe orienté où le total ligne n'est pas égal au total colonne (li ≠ cj). On peut suivre la même démarche pour suivre la dispersion et l'accessibilité tout en distinguant entre deux types d'accessibilité :

- *l'accessibilité externe* au réseau (Ae) qui exprime celle d'un point donné au reste des points du graphe et se trouve matérialisée par le total des lignes (li),
- *l'accessibilité interne* du réseau (Ai) qui mesure l'accessibilité de l'ensemble du réseau au point i et se trouve exprimée par le total colonne (cj).

L'accessibilité d'un nœud peut être exprimée aussi par l'inverse de la somme des distances de la ligne di (ou de la colonne

---

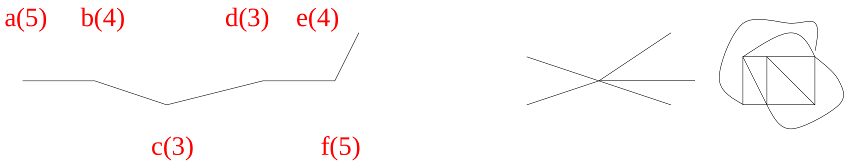
[40] Dans un graphe symétrique connecté, la distance à un nœud est de 1 lorsqu'il est fortement connexe, la somme ligne est de (n-1), la somme totale est de n(n -1). Dans un graphe fortement dispersé, la distance entre un nœud et un autre va de 1 à (n-1). La somme totale de la série [1 + 2 + 3 +… (n-1)] est de n(n - 1)/2, la somme totale dans la matrice pou n points est n²(n - 1)/2.

[41] En retranchant le minimum de la somme des distances et en divisant le résultat sur le maximum obtenu, on obtient un indice variant de 0 à 1 qui peut être exprimé en % : le maximum devient : n²(n - 1)/2 - n(n - 1) = n(n - 1)(n - 2)/2. C'est comme on utilise le rapport (Ai - min)/(Max - min) permettant d'avoir un indice variant de 0 à 1.

di). Plus le point est central, plus la somme des distances aux autres lieux est faible et plus l'inverse est élevé : Ai = 1/Σdi.

* Dans un réseau en ligne, la distance maximale : d_{max} = (n-1) pour les terminaux, elle baisse lorsqu'on va vers le centre dont l'écart est : d_{min} = (n/2) si n est pair et (n +1)/2 lorsque n est impair. La somme des distances (E) dans le réseau est de D = n(3n-2)/4 lorsque n est pair. Dans le graphe suivant les points c et d ont un écart de 3, soit (5+1)/2 = 3. La somme des écarts est de 24.

Variation des écarts dans les différents réseaux de 6 noeuds



Réseau en ligne Réseau hiérarchique centralisé R f. connexe

* Dans un réseau hiérarchique très centralisé, la distance va de 1 à 2 pour les points périphériques, soit un total de 2n – 1.

* Les réseaux fortement connexes ont des écarts variant entre 1, n/2 quand n est pair et (n - 1)/2 lorsque n est impair. La connexité totale, où il y a une liaison directe entre tous les nœuds, devient impossible dans un réseau planaire lorsque le nombre de nœuds est égal ou dépasse 5. En effet, au-delà de quatre nœuds, certains nœuds ne peuvent pas avoir de liens directs et leur nombre s'élève avec la taille du réseau.

Cet indice exprime en même temps la centralité qui constitue un concept fondamental dans la structure des réseaux.

5.3 - L'indice de centralité de Bavelas

Le point le plus central est toujours le point le plus accessible du réseau puisqu'il est le plus proche de tous les autres. Il suffit de diviser le total de la matrice par le total de chaque nœud pour obtenir les différents indices de centralité Ci.

Soit Si ou Ai : la somme de distances de xi vers les autres noeuds, Si = Σdij et S ou A : la somme totale des distances dans une matrice, l'indice de centralité de Bavelas du noeud i est le rapport entre le total des distances dans la matrice et celui du nœud i :

$$Ci = S/Si.$$

Cet indice a un maximum (n(n-1)/2) qui est n'est jamais atteint puisqu'il suppose que tous les points du graphe soient distants de (n - 1) arêtes, ce qui est impossible.

On peut utiliser aussi le rapport des indices sur l'indice le plus élevé, c'est à dire en comparaison au lieu le plus central qui aura l'indice pondéré de 1 : Ci' = Ci/Max Ci

En utilisant le graphe précédent, la matrice d'accessibilité associée, on peut déterminer les indices de centralité des différents nœuds. Il en ressort que le point C est le point le plus accessible et le plus central aussi.

	1	2	3	4	5	6	Total li	Ci = S/Si	Indice relatif Ci'
1	0	1	2	3	3	4	13	4,77	0,53
2	1	0	1	2	2	3	9	6,88	0,77
3	2	1	0	1	1	2	7	8,86	1
4	3	2	1	0	2	3	11	5,63	0,63
5	3	2	1	2	0	1	9	6,88	0,77
6	4	3	2	3	1	0	13	4,77	0,53
Cj	1 3	9	7	11	9	13	62		

En Tunisie, les points centraux pur le rail se situent autour de Tunis compte tenu de la configuration du réseau (Belhedi A, 1980), tandis que pour la route c'est plutôt aux environs de Kairouan que se situe le centre du réseau[42].

L'indice de centralité du réseau peut être exprimé par la somme des indices de centralités : C = Σci ou la moyenne des indices.

Dans l'exemple précédent, le total des indices de centralités est de 37,8 mais on peut utiliser aussi la moyenne qui est de 6,23.

Dans un graphe orienté, comme pour l'accessibilité, il faudrait distinguer la centralité pour accéder à l'ensemble du réseau (ligne) de l'accessibilité à partir du réseau (colonne) qui sont identiques dans un graphe symétrique.

L'accessibilité et la centralité peuvent être pondérées par le temps du trajet, le temps d'attente ou les correspondances des lignes

---

42 Travail inédit de Miossec J.M et Belhedi A

(bus, métro, train, avion) pour déterminer le centre, le point médian ou la localisation optimale pour certains services. Ainsi, la distribution de certains services peut être réaménagée parallèlement à l'évolution de la demande ou de la population des quartiers ou des villes comme les bureaux de poste, les écoles primaires ou de base, les pharmacies ou les guichets bancaires.

Le modèle de la *p-médiane* permet de résoudre ce problème. Le modèle est fondé sur le calcul de la position du centre médian dans le réseau, minimise la somme pondérée des distances de déplacement des clients vers les différents points équipés par les services concernés. Le travail de E Blin (1994) sur le service postal dans la région du Havre et de Rouen en France est intéressant[43].

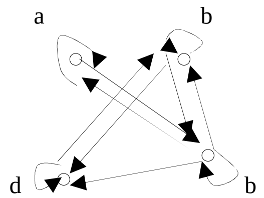
Cartes de centralité ferroviaire te routière A Belhedi p 110

5.4 - La puissance du nœud

La puissance Πi d'un point i est la limite lorsque k tend vers l'infini du rapport : le nombre de chemins k allant de i à tous les noeuds/le nombre total de chemins k dans le graphe :

$$\Pi i = Pk(i)/\Sigma Pk(i)$$

Le vecteur Πi = (Π1,...Πn) tend vers un vecteur propre de la matrice C. Le sommet dont la puissance est élevée est le mieux placé pour influencer les autres sommets.



Puissance d'un Sommet (graphe avec circuit)

	A	B	C	D	P1 (i)	P2 (i)	P3 (i)	Pk (i)	Πi
A	1	2	1	0	4	13	47	64	0.23
B	0	1	1	1	3	12	45	60	0.21

43 Blin E – 1994 : *Repenser le réseau postal*. Rouen, Publications de l'Université, coll. « Nouvelles donnes en Géographie ». op. cité par Pumain D et Saint-Julien 2005, p 112

C	1	1	1	0	3	10	35	48	0.17
D	2	1	2	1	6	23	81	110	0.39
								282	

Dans le graphe orienté ci-dessus où les noeuds ont des boucles, on établit la matrice d'accessibilité. Ensuite, on multiplie le total des lignes (P1) par la ligne A pour trouver le vecteur P2, idem pour les autres vecteurs P3… pour définir la puissance de A, Pk est la somme des valeurs : Pk = P1 + P2 + P3 :

P1(i) = ΣCij, le total de la ligne i

P2(i) = ΣCij.Cj C2(1) = C11.C1 + ... C1n.Cn

Pk(i) = ΣCij.Pk-1 C3(1) = C11.C2(1) + ... C1n.P2(n)

$P_k\,(i) = P_{i1}\,(t) + P_{\,i2}\,(t) + ... + P_{in}\,(t)$

Dans le cas du graphe précédent, on a les résultats suivants :

P1(A) = ΣCij, total de la ligne i,

P2(A) = (4.1) + (3.2) + (3.1) + (6.0) = 13

P3(A) = (13.1) + (12.2) + (10.1) + (23.0) = 47

C'est le point D qui est le mieux placé pour influencer les autres nœuds puisqu'il a une puissance de 0,39 alors que les autres ne dépassent pas 0,23.

En utilisant les colonnes, on peut déterminer l'influence globale subie Π(i) selon le même procédé ; plus la puissance est élevée et plus l'influence subie est importante. Dans le tableau ci-dessous, c'est le point B qui a la puissance la plus élevée (0,34), suivi de peu par le point C avec 0,31.

	A	**B**	**C**	**D**	**Cij**
A	1	2	1	0	4
B	0	1	1	1	3
C	1	1	1	0	3
D	2	1	2	1	6
P1 (i)	4	5	5	2	
P2 (i)	13	20	18	7	
P3 (i)	45	71	65	27	
Pk (i)	62	96	88	36	282
Π (i)	0.22	0.34	0.31	0,13	

Le rapport des deux puissances (lignes/colonne) qu'on peut appeler (pi) indique la situation nette du noeud :

$$pi = \Pi l/\Pi c.$$

Lorsque pi est égal à 1, la position du nœud est neutre, elle lui permet autant d'influencer les autres que de subir leur influence. Quand pi > 1, la position expéditive l'emporte et le nœud peut influence les autres nœuds. Lorsque pi < 1, la puissance réceptrice l'emporte et le point subit plutôt l'influence des autres nœuds.

La puissance d'ordre 1 n'est que le demi degré externe d'un nœud. Le rapport des puissances d'ordre 1 exprime le rapport entre les degrés de nœuds, entre la puissance d'expédition et la puissance de réception. Les ordres de niveau supérieur expriment le rapport de puissance entre expédition et réception d'ordre 1, 2,… n, k. Ces deux types de puissance sont égaux dans un graphe symétrique, ils sont par contre différents dans le graphe orienté.

Puissance des nœuds

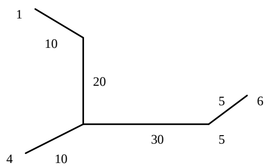
	A	B	C	D
Ligne	0,23	0,21	0,17	0,39
Colonne	0,22	0,34	0,31	0,13
P = Πl/Πc	1,04	0,62	0,55	3

Il ressort que c'est le point (d) qui est le mieux placé pour influencer le réseau tout en étant le moins placé pour être influencé par les autres (pi = 3), l'antipode est représenté par le point (c) avec pi = 0,55 alors que le point (a) dispose d'un indice égal à 1 ce qui lui confère une position neutre.

6 - Les graphes valués

Le problème se pose autrement pour les distances réelles, les coûts ou la durée de trajet si on veut analyser l'accessibilité et utiliser les matrices associées.

Pour déterminer la matrice du plus court chemin, on peut procéder soit de la manière directe, soit indirecte. Celle-ci consiste à élever la matrice V portant la valeur des relations directes aux puissances successives 2, 3 ...n où n est le diamètre.



V1

	1	2	3	4	5	6
1	0	10	∞	∞	∞	∞
2	10	0	20	∞	∞	∞
3	∞	20	0	10	30	∞
4	∞	∞	10	0	∞	∞
5	∞	∞	30	∞	0	5
6	∞	∞	∞	∞	5	∞

V2

	1	2	3	4	5	6
1	0	10	30			
2	10	0	20	30	50	
3	30	20	0	10	30	35
4		30	10	0	40	
5		50	30	40		5
6			35		5	

V3

	1	2	3	4	5	6
1	0	10	30	40	60	
2	10	0	20	30	50	55
3	30	20	0	10	30	35
4	40	30	10	0	40	45
5	60	50	30	40	0	5
6		55	35	45	5	0

V4

	1	2	3	4	5	6	Total
1	0	10	30	40	60	65	205
2	10	0	20	30	50	55	165
3	30	20	0	10	30	35	125
4	40	30	10	0	40	45	165
5	60	50	30	40	0	5	205
6	65	55	35	45	5	0	865

La matrice V^1 ne contient que les valeurs des relations directes, les autres cases portent la valeur infinie (∞). La méthode indirecte est intéressante dans le cas des grands réseaux où il devient difficile de repérer le plus court chemin visuellement. Pour les petits réseaux, la méthode directe demeure plus facile.

Le calcul des distances résultantes se fait selon les règles suivantes[44] : $x.y = x + y$ et $x + y = \text{Min}(x.y)$.

Dans la matrice V^2, on a pour la case (13) : (0 + 0) + (10 + 20) + (0 + 0) + (0 + 10) + (0 + 30) + (0 + 0). En utilisant la 2° règle, on a le minimum (30) qu'on porte dans la case 13 de la matrice V2.

Le total de ligne indique l'accessibilité du lieu i, il représente la distance totale (distance, coût, durée...) d'un point vers l'ensemble du réseau. La somme des lignes (colonnes) indique le total des distances (coût, temps) dans le réseau. Si les relations ne sont pas symétriques,

---

44 C'est une forme de distance dij, où on ne retient que la dimension minimale.

le total de colonne (j) exprime l'accessibilité du réseau au point j : *l'accessibilité externe* tandis que le total des colonnes exprime l'accessibilité du point i vers l'ensemble des lieux : *l'accessibilité interne*. Dans le cas du graphe précédent, le point 3 apparaît le plus accessible.

La carte suivante exprime l'accessibilité des villes dans le réseau ferré français mesurée par le temps de trajet en heures

Carte d'accessibilité ferroviaire en France

Source : cité par Pumain D et Saint-Julien T, 2005, 111

7 - La centralité

L'analyse de la centralité a un grand intérêt dans la mesure où elle commande les économies externes d'agglomération et détermine les localisations.

Nous avons vu ci-dessus certaines mesures de la centralité comme le degré de noeud et le nombre de König.

- Le degré de noeud exprime aussi la centralité : plus le degré de nœud est élevé, plus le nœud est central. Dans la matrice associée de connectivité, le total est égal à 2a dans un graphe symétrique (a dans un graphe orienté). Le rapport de centralité est[45] : $Ci_d = d/2a$.

- Le nombre de König exprime aussi la centralité dans la mesure où plus il est élevé et plus le point est excentrique. Le rapport entre le nombre Ki maximum du graphe au nombre Ki du noeud, exprime la centralité : $Ci_k = \text{Max } Ki/Ki$. Le point central du réseau dispose de la valeur la plus élevée et les indices expriment le gradient de centralité qui varie de δ à 1[46]. Comme la valeur maximale de Ki est (n - 1), on peut écrire l'indice comme suit :

$$Ci_k = (n - 1)/Ki$$

[45] Dans un graphe symétrique, le maximum de d est 2a, on peut utiliser le demi degré intérieur (di, $Ci_{di} = di/2$) et extérieur (de, $Ci_{de} = de/2$). Dans un graphe orienté on a : $Ci_d = d/a$ qu'on peut subdiviser aussi en di et de selon qu'on s'intéresse aux arcs incidents ou sortants. Le maximum de d est a.

[46] On peut utiliser aussi le rapport inverse : $Ci_k = Ki/\sup Ki$ qui varie $1/\delta$ pour le point central à 1 pour le point le plus excentrique. Le diamètre δ varie, quant à lui, de 1 dans un réseau fortement connexe à (n – 1) dans un réseau fortement dispersé.

- Dans la matrice de connectivité Cij, le total de la ligne exprime le nombre de relations d'un nœud i et la centralité. Plus le total est élevé plus le point est connecté aux autres points. La centralité peut être exprimée par le rapport entre le total de la ligne (ou colonne) au total général de la matrice :

$$Ci_c = Cij/\Sigma cij.$$

On peut aussi exprimer cette centralité par le rapport entre les valeurs le total ligne (ou colonne) et le Max Ci :

$$Ci_c' = Cij/\text{Max } Cij.$$

- Dans la matrice d'accessibilité topologique ou des écarts (Aij), la centralité est exprimée par le rapport de la somme des lignes (ΣAij) au total de la ligne Ai :

$$Ci_a = \Sigma Aij/Ai.$$

Plus le point est central, plus le total ligne est faible et plus l'indice de centralité est élevé. On peut exprimer aussi l'indice par rapport à l'indice le plus élevé du réseau de manière à ce que le point le plus central ait la valeur 1. Il suffit pour cela de diviser l'accessibilité minimale (Min Aij) sur le total ligne Ai :

$$Ci'_a = \min Ai/Ai$$

- Dans la matrice des distances (Dij), le rapport entre le total des distances D et le total de ligne Di représente un indice de centralité relative : $Ci_d = D/Di$. Là aussi, on peut utiliser, comme on l'a déjà fait pour la matrice de connectivité et d'accessibilité, le rapport entre le total ligne le plus élevé comme référence de manière à ce que le point le plus central ait la valeur 1 : $Ci_d = Di/\text{Max } Di$.

Or la distance la plus élevée n'est autre que le diamètre du réseau, ce qui nous permet d'écrire l'indice de centralité comme suit :

$$Ci_d = Di/d$$

Les matrices associées permettent de définir les composantes connexes du réseau. Il suffit de déterminer les nœuds les plus proches pour chaque nœud qui forment un sous-ensemble (la composante connexe à un niveau donné) puis on recherche les sous-ensembles les plus proches jusqu'à obtenir le chemin ou la chaîne la plus courte.

On peut utiliser cette approche dans l'analyse des liens par exemple entre les variables ou les lieux. Dans la matrice de corrélation R, on peut déterminer le sous-ensemble des variables reliées positivement ou négativement selon le niveau de signification de r (99%, 95% et 90%) qu'on peut matérialiser par un graphe valué. Les variables très corrélées forment des composantes connexes ou des paires réciproques dans la méthode de l'analyse du lien par exemple (Belhedi A, 2009, Racine J.B et Reymond H, 1973) et contribuent à former le premier facteur de l'ACP (Beguin H, Pumain 1994, 174). La classification hiérarchique ascendante (CHA) est représentée sous forme d'un arbre, qu'on appelle arbre factoriel ou arbre de classification. Les méthodes de classification utilise la plus petite distance ou la plus forte similitude entre les lieux pour les regrouper ensemble et on continue le processus jusqu'à la fin de l'opération.

8 - La desserte

La topologie permet de bien simplifier le réseau et de dégager les caractéristiques morphologique et structurelles du réseau au prix d'une perte d'information comme la configuration réelle, la topographie, le tracé réel, la position des noeuds. En plus de la connectivité, l'accessibilité et la centralité, la notion de desserte est très importante pour exprimer l'aire ou la population concernée par le réseau. Elle permet de caractériser le réseau par rapport à l'aire qu'il dessert ou draine.

On peut définir plusieurs paramètres de desserte comme la densité, le maillage ou le parcours moyen.

n = la distance maximale au réseau.

a- La densité

La densité est exprimée par le rapport de la longueur totale du réseau (L) à l'aire desservie S (km²) ou à la population P. Elle peut être exprimée par 100, en milliers ou plus (1à ou 100 milles) pour éviter les très faibles valeurs (par 1000 km² ou 1000 hab.).

Soit d_p = la densité du réseau par rapport à la superficie, d_s = la densité par rapport à la population, L = la longueur totale du réseau en km, S = l'aire desservie (km²…), P = la population, on peut écrire :

$$d_p = 1000*L/P$$
$$d_s = 1000*L/S$$

La densité s'exprime en km/km² et en km/1000 hab. En Tunisie, elle est respectivement de 98 et 298 pour la route, 10,6 et 31,6 pour le rail (Belhedi A 1980). En Europe, rapportée à la superficie, la densité varie de 115 km/1000 km² en Allemagne et Belgique à 19 en Grèce (la France 61). Rapportée à la population, la densité est la plus élevée au Luxembourg (72 km/100 000 hab.) contre 18 aux Pays Bas alors que la grande Bretagne se situe au même niveau que le Portygal (6_ km pour 1000 km² et 29 km pour 100 000 hab.)[47].

La relation entre ds et dp est exprimée par la densité (d) de la population (d = P/S)[48] : ds /dp = d

Pour le réseau hydrographique, c'est la *densité du drainage* (D_d), qui est égale au rapport entre la longueur du réseau (L) et la superficie du bassin-versant (S).

$$Dd = L / S$$

La densité varie en fait en fonction de la lithologie (nature de la roche qui conditionne l'écoulement et l'infiltration), de la topographie (le système des pentes) et du climat (précipitation, évapotranspiration). Des mesures faites aux USA[49] montrent que la densité est faible dans les zones perméables (3-4 mille/mille²) contrairement aux sols argileux où elle peut atteindre plus de cent fois (1100 à 1300 M/M²).

De la même manière, on peut utiliser aussi de densité de drainage d'un réseau de transport ou de communication. En France, la densité du réseau ferré est de 40 km/km² en moyenne, mais elle varie selon les régions, le tableau suivant nous donne sur trois réseaux régionaux de Tours, Strasbourg et Lille. La densité est faible à Tours avec 35 km/km², soit moins de la moitié de celle de Lille (82).

Densité du réseau routier interurbain en km/km² 1981-1983

Pays	Densité	Pays	Densité
Belgique	4,2	U.S.A	0,66
Japon	2,97	Portugal	0,58
Pays Bas	2,68	Roumanie	0,31
France	1,46	Tunisie	0,13
Italie	0,99	Madagascar	0,05

Source : Pinchemel Ph. Et G, 1997, 105

On peut utiliser aussi la *densité stationnelle* qui est la *densité des stations* du réseau par rapport à la superficie (Ds) ou à la population (Dp)

[47] Anide, Le reti di trasporto, 1994, cité par Pumain D et Saint Julien T, 2005, p 113.
[48] ds/dp = (L/S)/L/P) = L*P/L*S = P/S.
[49] Cité par Pumain D et Saint Julien T, 2005, 114

avec n ou s : nombre de stations ou nœuds, S : la superficie et P : la population.

$$Ds = s/S \qquad Dp = s/P$$

Le tableau suivant montre la densité stationnelle des trois réseaux ferrés, elle est quatre fois plus faible dans région de Tours avec moins d'une station par km² contre presque 3 dans les deux autres. Le diamètre étant de 5 et de 9 respectivement.

Indicateurs de desserte de trois réseaux ferrés régionaux français

	Densité L/S en km/km²	Densité de stations n/S en milliers	Longueur moyenne du tronçon L /a en km	Longueur moyenne par nœud L/n en km
Tours	35	0,7	50	47
Strasbourg	73	2,7	27	27
Lille	82	2,7	22	30

Source : Dancoisne P, 1984, in Pumain D et Saint Julien T, 2005, op. cit., p 115. Traitement personnel.

Borchert (1961) a montré dans la région de Minneapolis et Saint Paul qu'il y a une très forte corrélation entre la longueur d'un réseau et le nombre de jonctions (r = 0,99), entre la densité de population et le nombre d'intersections de routes (Haggett P, 1973, 87-88).

La longueur moyenne par arête et nœud exprime aussi la densité de desserte en indiquant la longueur moyenne des tronçons entre deux stations ou deux gares (cf. supra les indices êta et thêta).

b- Le champ

Le champ est la distance moyenne entre deux lignes voisines. Il est mesuré par le rapport entre S et L: c'est-à-dire l'inverse de densité. Il est de 10,2 km pour la route et 95 km pour le rail en Tunisie (Belhedi A 1980).

$$Ch = S/L = 1/ds$$

Le parcours moyen à travers un champ (p) est la moitié du champ. Il exprime la distance maximale moyenne à une ligne du réseau, il est égal au rapport entre la superficie et deux fois la longueur du réseau :

$$p = S/2L.$$

Le parcours moyen est plus clair dans la mesure où il exprime la distance moyenne pour accéder au réseau en prenant comme indicateur la distance à parcourir pour atteindre la ligne la plus proche du réseau.

Le parcours moyen est de 47,4 km pour le rail et 5 km pour la route en Tunisie (Belhedi A 1980). En France et pour le réseau ferré, le parcours moyen est de 29 km dans la région de Tours, 14 à Strasbourg et 12 dans la région de Lille contre une moyenne nationale de 40 km (op. cit.)

c- Le maillage du réseau

La *maille* est une aire délimitée par des lignes du réseau de même niveau ou de même mode (piste, route régional, nationale, autoroute, voie ferré...).

Le *maillage* du réseau est la subdivision de l'espace en *mailles*, il s'exprime à travers le nombre et la forme des mailles et représente le mode de desserte et de partition de l'espace. Il exprime la densité de la desserte et la circuité du réseau. Le nombre de mailles varie selon que les lignes enveloppantes sont incluses ou non, il est égal à :

$$m = L / 2S \pm 1$$

En Tunisie, il est de 20,87 pour la route et 2,141 pour le rail si on inclue les lignes enveloppantes (Belhedi A 1980).

Le côté moyen de maille (l) : $l = 2S/(L \pm 2S^{1/2})$.

En Tunisie, il est de 20,37 pour la route et 129,3 pour le rail (355,76)

d- L'aire et la population desservies

Le réseau dessert l'espace d'une manière inégale et la densité (d_s, d_p) ne donne qu'une idée moyenne et partielle de la desserte. Pour déterminer l'aire (A_d) ou la population (P_d) desservie, il y a lieu de tenir compte du *rayon moyen de desserte* (r) et de la densité moyenne (d).

L'aire desservie : $A_d = 2Lr/S$

La population desservie : $P_d = 2Lrd/P$

Sur la base d'un rayon moyen de 2,5 Km, on peut estimer que l'aire desservie est de 2,1% et 76% pour le rail et la route alors que la population desservie est de 38,2 et 93,7% (Belhedi A 1980).

Les études ont montré que la population explique 50% de la densité du réseau (Taaffe, Morrill et Gould 1963) tandis que le relief contribue à 25%. Ceci montre que le rapport du réseau à l'espace est fonction de deux paramètres contradictoires :

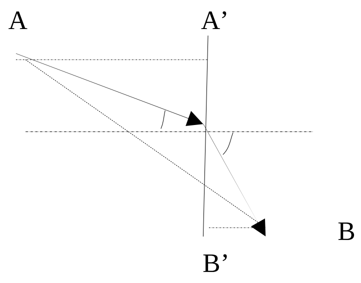
* Desservir le maximum de lieux : ce sont les *déviations positives*, la voie s'allonge pour desservir plusieurs centres ou collecter le plus de flux (Wellington 1887). Il existe une étroite corrélation entre la longueur totale et le nombre de jonctions (Borchert).

* Eviter les obstacles et minimiser la distance là où le coût ou l'effort est élevé : ce sont les *déviations négatives*, le résultat est l'allongement de la voie.

Lösch a repris la loi de Snell relative à la réfraction pour expliquer le tracé d'une voie à travers une aire d'inégale résistance (Cf. supra) avec C_1 et C_2 : les coûts unitaires dans les deux milieux M1 et M2, x et y sont les angles formés par la ligne de partage des milieux A'B' et la perpendiculaire à cette ligne de partage des deux milieux :

$$C_1 \sin x - C_2 \sin y = 0$$

.



Plus le coût d'un milieu s'élève et plus la longueur du trajet correspondant se réduit pour minimiser les coûts globaux, le tracé limite est celui de la perpendiculaire AA' ou BB' à la ligne de partage A'B'. Plus le coût est faible et plus le parcours a tendance à s'allonger.

Plus le coût de traversée est élevé et plus le *détournement* est important et la *réfraction* est élevée. Si partout d'autres facteurs interviennent dans le tracé des voies, il est aussi certain que le principe de Lösch est partout présent (Haggett P, 1973, 77).

e- Le facteur de voie (ou route factor)

Le *facteur de voie* est le rapport entre la distance observée (Do) et la distance (théorique) à vol d'oiseau (dr) :

$$v = do/dr.$$

Ce rapport s'élève lorsque les contraintes physiques sont importantes, lorsqu'il dépasse 2 le chemin est tortueux (Schumm).

Kansky a utilisé une autre formule pondérée par le nombre de noeuds[50] :

$$v = \Sigma (do - dr)^2/V_n$$

Mais nous croyons qu'on peut simplement utiliser l'écart type de ces déviations ce qui rend en même temps l'indicateur comparable à la moyenne des distances réelles ou théoriques :

$$v = [\Sigma (do - dr)^2/V_n]^{1/2}$$

Une corrélation avec le nombre de centres connectés indique la présence de déviations positives tandis qu'une corrélation négative ou très faible exprime plutôt la présence de déviations négatives.

Le rapport entre les distances observées permet de comparer l'aptitude à la desserte des modes différents (route, rail...), c'est le *facteur modal*. Ces rapports peuvent être calculés par voie, lieu (*facteur nodal*) ou l'ensemble du réseau. Ainsi, il est de 0,375 pour la route et 1,738 pour le rail (Belhedi A 1980).

Cependant, la longueur d'un réseau ne dépend pas seulement des contraintes physiques ou des centre reliés. Elle dépend aussi du rapport constructeur-usager. Bunge (1966) a distingué 5 types de réseaux :

a - Le réseau à distance minimale (Réseau de Paul Revere)

b - Le circuit le plus court ou le réseau du voyageur de commerce

---

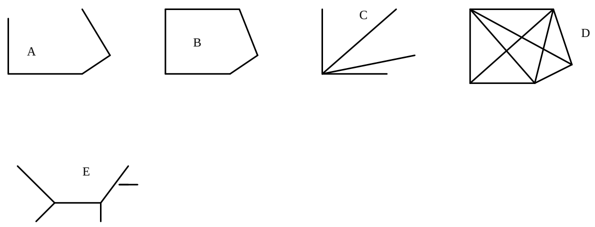
[50] C'est la variance déviations des distances réelles dr par rapport à la distance théorique do.

c - Le réseau hiérarchique dont la forme la plus caractéristique est le réseau en étoile qui est très centralisé et présente une connexion minimale

d - Le réseau complet aux moindres coûts pour l'usager. Ce réseau présente des coûts élevés pour le constructeur.

e - L'ensemble le plus court. Il présente les moindres coûts pour le constructeur mais des coûts élevés pour l’exploitant et l’usager.

Les types de réseaux possibles pour 5 noeuds



Source : Bunge, 1962 – Theoretical Geography.

Quand (1960) montre qu'il y a :(n-1)! solutions pour relier n points mais la solution retenue dépend en fait du triple rapport constructeur-gestionnaire-usager. Ainsi pour 5 points, on a 24 possibilités de relier les différents nœuds (4*3*2 = 24)

* Pour le constructeur, il s'agit d'avoir la distance minimale (E). C'est *le problème de Sterner*. En effet, pour avoir la distance minimale, en reliant n points, on doit avoir (n - 2) angles de 120° se regroupant 3 à 3. Beckman propose de pondérer les angles par le flux pour établir le kilométrage minimum/ usager.

* Pour l'usager, l'idéal c'est d'avoir un réseau complet qui permet la desserte optimale.

* Pour le gestionnaire, il s'agit d'avoir le minimum de terminus avec la plus courte distance : c'est le type B.

D'autres facteurs interviennent cependant dans le choix de la configuration finale, on peut citer :

* La hiérarchie du système urbain qui donne au réseau une structure hiérarchique, c'est le type C

* La densité et l'importance du trafic font que le réseau complet devient plus intéressant alors que dans les espaces peu

peuplés et où les sources de trafic sont limitées, c'est le type E qui convient le mieux. C'est le cas des réseaux ferroviaires en pays colonisés où s'ajoutent en plus les impératifs stratégiques de contrôle.

La forme des réseaux est très variable et il est difficile de la cerner avec précision, la régularité est plutôt l'exception et il semble que la méthode fractale (cf. supra) est plus indiquée. Cependant, on peut distinguer avec Roger Brunet (1987) quelques formes élémentaires de référence qui permettent de comparer les réseaux :

- Le réseau en étoile
- Le réseau en arbre
- Le réseau en flocon de neige
- Le réseau en espalier
- Le réseau radio-concentrique
- Le réseau en damier
- Le réseau complexe
- Le réseau en éventail

Carte des formes de R Brunet in Pumain D

Les analyses ont montré de fortes corrélations entre les indices topologiques et le niveau de développement (Kansky 1963). Ainsi la consommation d'énergie augmente avec Bêta tandis que le PNB/hab. augmente avec l'indice Pi (Kansky 1963, 42, Haggett 1973, 84). Si les facteurs politiques jouent au niveau des voies isolées (Wolfe 1963), ce sont les données économiques qui marquent l'ensemble du réseau (Haggett P, 1973). L'analyse topologique met l'accent surtout sur les propriétés spatiales du réseau mais pas sur sa dimension. L'avantage d'une telle analyse doit être pesée avec la perte d'information consécutive à la simplification. Certains outils de l'analyse sont capables de révéler des structures cachées insoupçonnées, c'est le cas par exemple de l'analyse factorielle de la matrice associée de connectivité qu'on n'a pas traité ici.

Indices et caractéristiques topologiques d'un réseau

Indice	Définition	Symbole	Formule	Signification
Nombre cyclomatique	Nb de circuits de base	μ	U = a - v + p	Circuité
Nombre de KÖnig (en a)	Nb max d'arêtes entre un noeud et un autre	Ki	Ki = max d ij	Centralité
Diamètre (en a)	Distance max entre deux noeuds	δ		Dispersion
Indice Alpha (en %)	Rapport cycles de base et max de cycles (%)	α	α = U/(2n-5)	Circuité
Indice Bêta	Rapport entre les arêtes et les noeuds	β	β = a/n	Connectivité, Nbre arcs :nœud, complexité
Indice Gamma	Rapport entre a et Max a (%)	γ	γ = a/3(n-3)	Connexité
Indice Etat (km)	Rapport entre la longueur du réseau (km) et le Nb d'arêtes	η	n = L / a	Longueur moyenne d'une arête
Indice Thêta (km)	Rapport entre le réseau (Km) et le Nbre de sommets	θ	θ = L/n	Longueur moyenne par sommet
Indice Pi (km)	Rapport entre le réseau (km) et le diamètre (d)	Π	Π = L/δ	Dispersion et forme
Indice de fonction	Fonctions assurées par le noeud	W	Wi = n ai ; w = 2ne	Nb de fonctions assuré par le lieu
Indice de fonction	Indice de fonction / Max d ij	p	p = w/6v(v-2)	Efficience du régis de fonctionnalité
Point d'articulation	Nb de noeuds dont le retrait entraîne la déconnexion	nv		Vulnérabilité
Arêtes d'articulation	le Nb min d'arêtes dont le retrait entraîne la déconnexion	av		Vulnérabilité
Indice Lamdha ou d'arborescence	Nb de terminaux / Nb max de terminaux	ζ	ζ = t/(n-1)	Arborescence
Indice Pi'	Nb arêtes / diamètre			Dispersion
Indice de connectivité	Degré de connectivité d'un réseau	C	C = [Li-2(n-1)]/(n-1)(n-2)	Connectivité
Indice de dispersion	Degré de dispersion	d	d = (Li-n(n-1)/n(n-1)(n-2)	Dispersion
Indice de déviation	Rapport dispersion réelle et théorique	D	D = Dr/(Dt -1)	Dispersion